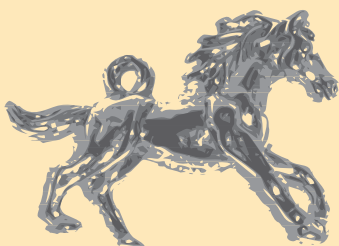


# IBERIA

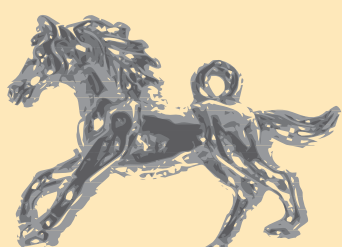
## FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS

ACTIVIDAD	BLOQUE	CONTENIDOS
1. Juan Martínez Silíceo: Repartos	-Aritmética y Álgebra	-Problemas de reparto
2. La Geometría: Savasorda	-Geometría y Álgebra	-Ecuaciones y trigonometría
3. El Álgebra: Ben Ezra	-Álgebra y Geometría	-Ecuaciones lineales
4. Mosaicos de la Alhambra	-Aritmética y Geometría	-Simetrías y Teorema de Pitágoras
5. Un juego medieval: el Morris	-Resolución de problemas	-Juegos de estrategia
6. El número cordobés	-Geometría y Álgebra	-Triángulos, ecuaciones y trigonometría
7. Monedas en la Edad Media	-Aritmética y Álgebra	-Problemas de mezclas
8. La Aritmética: Gaspar Nicolás	-Aritmética y Álgebra	-Operaciones numéricas y ecuaciones
9. La barraca valenciana	-Aritmética y Álgebra	-Operaciones numéricas y ecuaciones
10. La clepsidra: reloj de agua	-Análisis de funciones	-Funciones recíprocas

2º Ciclo de la E.S.O. Matemáticas, **Iberia**



# 2º Ciclo de la E.S.O. Matemáticas, **Ibernia**



# 1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

A lo largo de la Historia aparece innumerables veces el problema de cómo repartir una cantidad entre varias personas, situación que se daba frecuentemente en el reparto de las herencias y también con los acreedores, cuando la cantidad que reclamaban era superior a lo que el deudor podía pagar. ¿Cómo se efectuaba entonces el reparto? Vamos a ver distintos ejemplos.

**Juan Martínez Silíceo (1477-1557)** fue uno de los matemáticos españoles que en la primera mitad del siglo XVI enseñaron matemáticas en París. Estudió filosofía, dialéctica, matemáticas y fue profesor de la Universidad de Salamanca. En 1534 el emperador Carlos V le nombró maestro de su hijo Felipe II que entonces tenía 6 años y posteriormente obtuvo el nombramiento de obispo de Cartagena y Cardenal de Toledo.



Escribió varias obras, la más importante de ellas se titula *Ars Arithmetica* y fue publicada en París en 1514, tuvo un gran éxito y se realizaron varias ediciones, una de ellas en Valencia. En este libro, en un tratado dedicado a la regla de tres aparecen dos problemas que te mostramos a continuación, intenta resolverlos, en las soluciones encontrarás cómo los resolvió Silíceo.

1.1. Un hombre enfermo, que tenía a su esposa embarazada, y con un capital de 2.000 escudos, dejó este testamento: si mi mujer da a luz un niño, para él son los tres quintos de mis bienes, para mi mujer un quinto y para la iglesia el resto. Pero si da a luz una niña, esta recibirá dos quintos, mi mujer otros dos quintos y la iglesia el resto. Al llegar el momento, la mujer dio a luz gemelos, un niño y una niña. Pregunta: ¿Cómo se distribuirán los bienes?

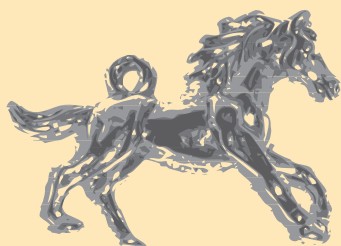
1.2. Hay que dividir mil francos entre tres socios, el primero tendrá el doble que el segundo y el segundo el triple que el tercero. Pregunta: ¿Cuánto tendrá cada uno?

El siguiente ejemplo fue enunciado por el rabino Abraham Ibn Ezra en el año 1140 a.C.

1.3. Un hombre muere dejando cuatro hijos y cuatro herencias. Asigna al primer hijo la totalidad del patrimonio, al segundo la mitad, al tercero una tercera parte y al cuarto una cuarta parte. Evidentemente no hay suficiente para satisfacer los derechos de los cuatro hijos. ¿Cómo se realizará el reparto?

## Reparto Proporcional

Nosotros utilizamos para resolver estos problemas el **Reparto Proporcional**, según el cuál a cada uno de los herederos le corresponde una fracción del total a repartir que tiene como numerador la parte que debe corresponder a esa persona y como denominador la suma de todas las cantidades reclamadas por los herederos.

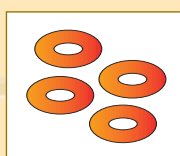


# 1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

Pero no hay una única forma de hacer repartos, nosotros trabajamos con repartos directamente o inversamente proporcionales, pero un autor llamado O'Neill propone los siguientes métodos:

## Reparto proporcional con los derechos truncados

Es una versión del reparto proporcional pero con una diferencia: si alguno de los herederos reclama una cantidad mayor que la cantidad a repartir, se le asigna para el reparto la cantidad a repartir.



### Vamos a explicarlo con un ejemplo:

Pedro, Juan y Marta han ganado en un concurso 3, 6 y 20 rosquillas cada uno, pero cuando les van a entregar el premio se dan cuenta que sólo tienen 18 rosquillas en total. ¿Cómo las reparten?

### Solución:

A cada uno se le asigna para el reparto lo que sea más pequeño entre lo que le corresponde o el total.

Si llamamos  $E$  al total y  $r_i$  a lo que le corresponde a cada uno sería: mínimo ( $r_i$ ,  $E$ ).

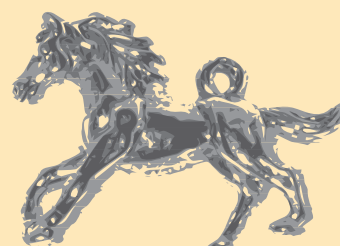
- A Pedro, entre 3 y 18 le corresponden 3.
- A Juan, entre 6 y 18 le corresponde 6.
- A Marta, entre 20 y 18 le corresponderán 18.

Ahora hacemos el reparto como antes:

- Pedro:  $\frac{3}{3+6+18} \cdot 18 = \frac{3}{27} \cdot 18 = 2$
- Juan:  $\frac{6}{27} \cdot 18 = 4$
- Marta:  $\frac{18}{27} \cdot 18 = 12$

Hemos repartido las 18 rosquillas:  $2+4+12 = 18$ .

- 1.4. ¿Te parece más justo este reparto o el reparto proporcional? ¿Cuántas rosquillas le corresponderían a cada uno de los amigos si hubieran hecho un reparto proporcional?



# 1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

## Regla Igualitaria

Es otra forma de repartir en la que se reparte **a partes iguales** el patrimonio entre todos. Esto se expresa matemáticamente  $\frac{E}{n}$  donde  $E$  es el total a repartir y  $n$  es el número de personas que participan en el reparto.

- 1.5. En el ejemplo de antes ¿Cuántas rosquillas le corresponden a cada niño si hacemos este reparto?

Esta regla, aunque se llama igualitaria parece poco justa ¿Crees que Pedro, Juan y Marta estarían de acuerdo en este reparto?

## Regla Igualitaria Restringida

Esta regla reparte también equitativamente pero evita el problema de que alguien pueda recibir más de lo que le corresponde, como le ocurría a Pedro, que recibía 6 rosquillas cuando le correspondían 3.

Para explicarlo supongamos que a Pedro, Juan y Marta les ha correspondido en una rifa 20, 100 y 200 gusanos de seda respectivamente pero cuando van a hacer el reparto se han escapado unos cuantos y sólo hay para repartir 90.

Si el reparto fuera igualitario, a cada uno le corresponderían  $\frac{90}{3} = 30$ , pero Pedro tendría más de los 20 que le han tocado.

Así que asignamos a cada uno el mínimo entre los que le tocan y 30:  $\text{Min}(r_i, 30)$ .

A Pedro le corresponderían 20, a Juan 30 y a Marta 30.

Restamos al total los 20 de Pedro y quedan  $90 - 20 = 70$  que los repartimos entre los otros dos.  $\frac{70}{2} = 35$

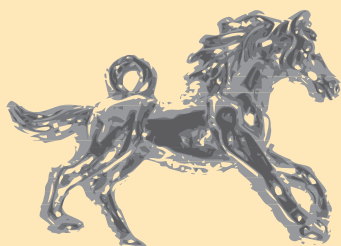
Así, Pedro recibe 20, y Juan y Marta 35 cada uno.

- 1.6. Imagina ahora que se tienen que repartir 90 manzanas pero a Pedro le corresponden 20, a Juan 25 y a Marta 100. ¿Cuántas manzanas le corresponden a cada uno haciendo el reparto anterior?

## Repartos Inversamente Proporcionales

También podemos realizar repartos inversamente proporcionales, intenta resolver el problema siguiente:

- 1.7. Pedro, Juan y Marta han subido a una tres palmeras y han conseguido entre los tres 300 dátiles. Se los van a repartir de forma que reciba más dátiles el que tiene menos años, es decir, inversamente proporcional a sus edades. Si Pedro tiene 10 años, Juan 15 y Marta 30, ¿Cuántos dátiles le corresponden a cada uno?





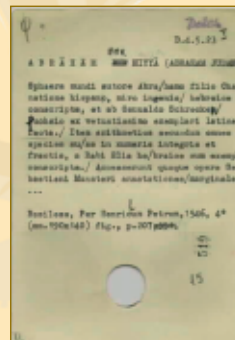
## 2. LA GEOMETRÍA: SAVASORDA

**Abraham bar Hiyya** (1092-1177), fue un matemático y astrónomo judío. También fue conocido por su nombre latino **Savasorda**, que significa gobernador de ciudad. Fue probablemente educado en el Califato de Córdoba, pero es en Barcelona donde escribió sus obras originales en hebreo.

Conocemos dos obras con contenido matemático:

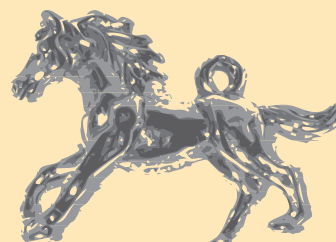
- *Yesodey ha-Tevuna u-Migdal ha-Emuna*, la primera enciclopedia escrita en hebreo sobre matemática, astronomía, óptica y música.
- *Hibbur ha-Meshiha We-ha Tishboret* (Tratado de medida y cálculo), escrito en 1116 y traducido al latín en 1145 por Platón de Tivoli con el nombre *Liber embadorum*.

Este tratado tenía como objetivo ayudar a los judíos españoles y franceses en el cálculo de medidas de los campos. Encontramos algunas definiciones, axiomas y teoremas de Euclides. También se encuentra una justificación geométrica de una ecuación de segundo grado.



Vas a resolver varios problemas del **Tratado de medida y cálculo**:

- 2.1. Si del área de un cuadrado quitamos la suma de dos de sus cuatros lados, sobra 21. ¿Cuál es el área del cuadrado y cuál la longitud de cada uno de los lados iguales?
- 2.2. Dada una cuerda de longitud 6 en un círculo de diámetro  $10 + \frac{1}{2}$ , descubre la longitud del arco correspondiente a la cuerda.
- 2.3. Descubre la longitud de una cuerda cuyo arco correspondiente tiene una longitud de  $5 + \frac{1}{2}$ , en un círculo de diámetro 33.
- 2.4. Si una cuerda de longitud 8, dista 2 de una circunferencia, descubre el diámetro del círculo.
- 2.5. En un rectángulo cuya diagonal es 20 y cuya longitud excede en 2 a su anchura, descubre la longitud, la anchura y el área.
- 2.6. ¿Cuál es la longitud del lado de un rombo, si una diagonal es 16 y la otra 12?



### 3. EL ÁLGEBRA: BEN EZRA

**Rabbi Abraham ben Meir Ezra** (1090-1167), fue un judío que nació, probablemente en Toledo y murió posiblemente en Roma. Ezra se dedicó inicialmente a la poesía, pero también tiene trabajos sobre gramática, astrología y matemáticas.

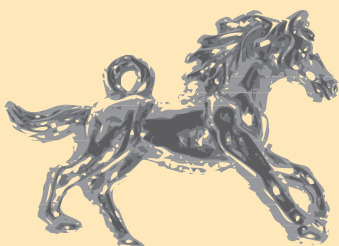
Conocemos varios textos, escritos en hebreo, relacionados con las matemáticas:

- *Séfer ha-Echad* (El libro de las unidades), donde describe los símbolos hindúes para las cifras del 1 al 9. Ezra utiliza las nueve primeras letras del alfabeto hebreo:

א ב ג ד ה ו ז ח ט

Utilizaba el sistema decimal para los números enteros y el sistema sexagesimal para las fracciones.

- *Séfer ha-Mispar* (El libro del número), donde describe el sistema decimal para los números enteros. En este libro utiliza el cero con forma de circunferencia y que designa como *gagal* (rueda).
- *Liber augmenti et diminutionis vocatus numerario divinationis...* es probablemente una traducción al latín de un libro suyo; también es atribuido al matemático árabe Ajjub al-Basri. El libro contiene diversos problemas donde se aplica la “regla de doble falsa posición” y está dividido en 7 partes: multiplicación, división, suma, diferencia, fracciones, razones y raíces cuadradas.



### 3. EL ÁLGEBRA: BEN EZRA

Vas a resolver varios problemas de Liber augmenti:

- 3.1. Capitulum de codem aliud: Un tesoro es aumentado en una tercera parte. Después una cuarta parte de su totalidad y añadida a la primera suma. La nueva suma es 30. ¿Cuál era el tesoro original?
- 3.2. Capitulum de eodem aliud: Un tesoro es aumentado en una tercera parte y cuatro dracmas. Después una cuarta parte del total es añadida a la primera suma. El resultado es cuarenta.
- 3.3. Capitulum ejus aliud: Un tesoro es aumentado cuatro dracmas. Después la mitad del total y cinco dracmas es añadida a la primera suma. Después fue aún se aumentó la cuarta parte. El resultado fue de setenta dracmas.
- 3.4. Capitulum de eodem aliud: Si te dicen que un mercader tiene un cierto dinero y que duplica su dinero y da dos dracmas. Vuelve a duplicar su dinero y da cuatro dracmas. Después vuelve a duplicar su dinero y da ocho dracmas y se queda sin nada. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente?
- 3.5. Capitulum pomis (Capítulo de los frutos): Un hombre entra en un campo de manzanos que tiene tres guardas y recolecta cierta cantidad de manzanas; encuentra el primer guarda y le da la mitad y dos manzanas; al encontrar al segundo guarda le da la mitad de lo que le queda y dos manzanas; por fin, al encontrar al tercero le da la mitad de lo que aún le queda y dos manzanas; entonces le queda una manzana. ¿Cuántas manzanas recolectó?





## 4. MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

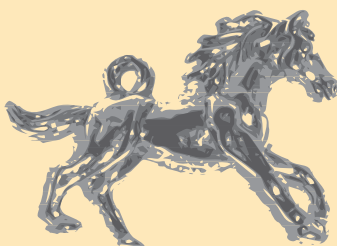
Se llama mosaico a todo recubrimiento del plano mediante piezas llamadas teselas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir y en el que los ángulos que concurren en un vértice deben de sumar 360 grados. Existen muchas formas de obtener un mosaico. Los más sencillos están formados por un único tipo de polígono regular, como el triángulo equilátero, el cuadrado o el hexágono regular.

También es posible conseguir mosaicos utilizando como tesela algún polígono irregular, como triángulos, cuadriláteros e incluso algún pentágono equilátero pero no equiángulo.

Combinando dos o más polígonos regulares pueden obtenerse también mosaicos, siempre y cuando la distribución de los mismos en cada vértice sea la misma. Es decir, podemos obtener figuras formadas por varios polígonos regulares que combinados convenientemente juntos forma una tesela, con la que podremos recubrir el plano.

Una curiosa forma de construir mosaicos vistosos y originales es mediante transformaciones de teselas poligonales que se convierten en formas abstractas, animales, hojas, etc. Los nuevos motivos mantienen la propiedad de seguir recubriendo el plano, las figuras se obtienen recortando una o varias partes del polígono base para colocarlas mediante traslaciones o giros en otro lado. Esta última técnica, junto con otras, fue utilizada en la construcción de los mosaicos nazaríes. La dinastía nazarí, descendiente de **Yusuf ben Nazar**, reinó en Granada desde el siglo XIII al XV. La Alhambra y Granada en general vivieron entonces una época de esplendor que ha quedado reflejada en sus construcciones. La transformación de un polígono regular en otra figura de igual superficie produjo formas desconocidas hasta entonces en la historia del Arte.

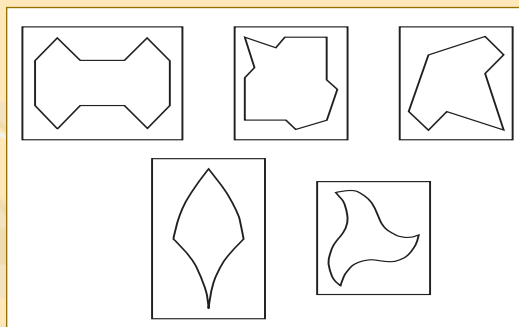
Los conocimientos geométricos y técnicos de los artistas islámicos de esta época han sido fuente de inspiración para innumerables artistas, como el famoso dibujante y pintor holandés M. C. Escher.



## 4. MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

A continuación te proponemos la construcción y estudio de cinco de los mosaicos nazaríes más conocidos: la pajarita, el avión, el pez volador, la escama y el hueso.

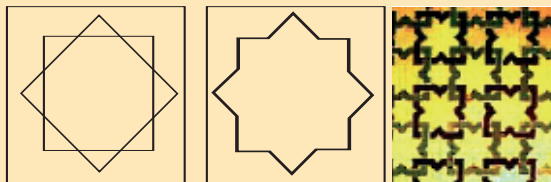
- 4.1. Para conseguir las teselas del hueso, el avión, el pez volador y la escama se ha partido de un cuadrado. ¿Qué transformaciones se han hecho para conseguir las? Supón que el cuadrado tiene 8 cm. de lado.



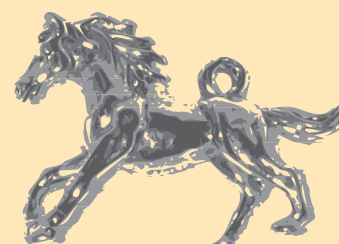
Para la tesela de la pajarita se parte de un triángulo equilátero.

- 4.2. Consigue recubrir el plano con ellas. ¿Qué transformaciones (traslaciones, giros, etc.) has de hacer a la pieza base para poder acoplarlas unas al lado de las otras?
- 4.3. Ya que el cuadrado utilizado tiene de lado 8 cm. determina el perímetro del hueso, el avión y el pez volador.
- 4.4. Indica los ejes de simetría de cada una de las teselas dibujadas.
- 4.5. Diseña tus propias losetas utilizando cuadrados y triángulos. ¿Qué técnica hay que utilizar en cada caso?
- 4.6. Otros mosaicos tienen su origen en el solapamiento de polígonos. Combinando cuadrado y rotación se crea una estructura que reina en la Alhambra sobre todas: el **sello de Salomón**.

- a) Indica todas las simetrías de la figura central.
- b) Si el lado del cuadrado mide 8 cm. determina el perímetro y el área.



- 4.7. Construye basado en el sello de salomón, mediante repetición, algún motivo ornamental.



## 5. UN JUEGO MEDIEVAL: EL MORRIS

Se han encontrado tableros del juego en el antiguo Egipto (1400 a.C.) y en Sri Lanka (100 d.C.). También en el barco vikingo de Gokstad (900 d.C.). Se ha especulado sobre si los griegos o los fenicios introdujeron el juego en el norte de Europa, mientras hay quien opina que fueron los árabes a través de España los introductores del juego a través del sur de Europa.

Lo que si es cierto que en el *Libro de los Juegos* producido bajo la dirección de Alfonso X el Sabio (1221-1284) aparecen las reglas e ilustraciones del tablero del morris.

Este libro es una recopilación de todos los juegos conocidos hasta entonces. Alfonso X supervisó el trabajo conjunto de judíos, musulmanes y cristianos que produjeron una serie de textos sobre historia, astronomía, religión,... y ¡juegos!



### EL JUEGO DEL MORRIS DE 9

**Número de jugadores:** Dos.

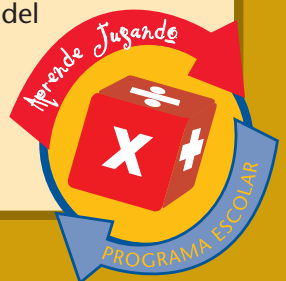
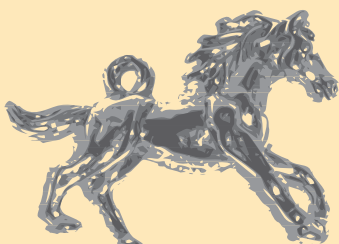
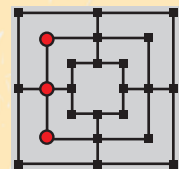
**Número de fichas:** Nueve para cada jugador.

**Objetivo:** Eliminar el mayor número de fichas del adversario.

**Origen del juego:** Antiguo Egipto antes de 1400 a.C.

### REGLAS DE JUEGO

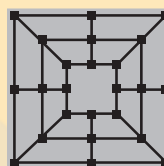
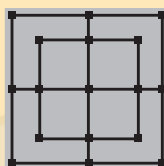
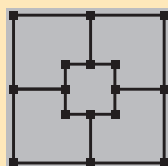
- I. Cada jugador dispone de nueve fichas de diferente color que van colocando alternativamente sobre el tablero. Se sortea quien inicia la colocación de las fichas.
- II. Una vez colocadas todas las fichas mueven una ficha cada vez a un lugar adyacente vacío siguiendo una línea del tablero.
- III. Cada jugador intenta formar una fila de tres fichas a lo largo de cualquier línea del tablero (se conoce como forma un "molino").
- IV. Si lo consigue captura la ficha que quiera del adversario y la saca del tablero.
- V. Pierde el jugador que quede con dos fichas solamente o queda bloqueado sin poder mover.
- VI. Cuando un jugador ha capturado todas las piezas del contrario, la partida ha terminado y ha ganado.



## 5. UN JUEGO MEDIEVAL: EL MORRIS

### JUEGO DEL MORRIS DE 5, DE 7 Y DE 12

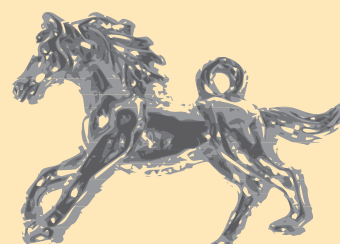
Estas variantes del juego siguen las mismas reglas pero, como indica su nombre, utilizan un número diferente de fichas.



- 5.1. Juega con tu compañero o compañera varias partidas con los diferentes tipos de "Morris".

Para cada uno de los diferentes tableros de Morris contesta a las preguntas siguientes:

- 5.2. a) ¿Hay un movimiento de apertura óptimo?  
b) ¿Cuántas son las posiciones posibles después de que cada jugador haya hecho un movimiento?  
c) ¿Cuál es el máximo número de fichas que puede haber sobre el tablero sin que se forme ningún "molino"?
- 5.3. Si los lados de los cuadrados de los tableros son de longitud 1, 2 y 3 cm., ¿cuál será la longitud total de las líneas del tablero?
- 5.4. Si una hormiga tuviera que recorrer todas las líneas del tablero, partiendo de una posición arbitraria, ¿cuál sería el camino más corto a seguir en cada uno de los tableros?





## 6. EL NÚMERO CORDOBÉS

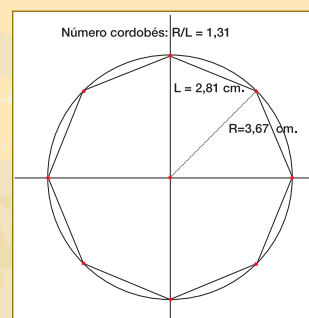


Igual que el número áureo aparece en infinidad de situaciones: en la naturaleza, en arquitectura, etc., hay otro número mucho menos conocido pero que también está presente en determinadas construcciones geométricas.

Así como el número de oro es la proporción entre el lado del decágono regular y el radio de la circunferencia circunscrita, el número cordobés relaciona el lado de octógono regular con el radio de la circunferencia circunscrita:

Al ser más fácil construir un octógono regular que un pentágono, dicha proporción se utilizó tanto en obras pictóricas como arquitectónicas.

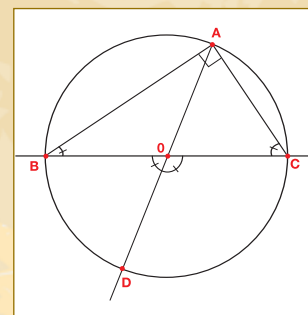
El nombre proviene del uso que se hizo de él en la construcción de la mezquita de Córdoba, mediante la utilización del arco de herradura. También fueron utilizados, por la cultura andalusí el llamado el arco de herradura apuntado.



El arquitecto español Rafael de la Hoz Arderius, considerando las últimas técnicas de medición obtenidas del *papiro de Rhind* indica que entre las diagonales de un rectángulo con esa proporción encaja perfectamente la *Gran Pirámide* de Egipto.

6.1. Demuestra que si un triángulo inscrito en una circunferencia tiene a la hipotenusa como diámetro es un triángulo rectángulo.

- ¿Cómo son los triángulos OBA y OCA?
- Si llamas  $\alpha = \angle OBA$  y  $\beta = \angle OCA$ , a dos ángulos de los triángulos, ¿cuánto vale el ángulo BAC?
- Calcula los ángulos BOD y COD y justifica que el triángulo es rectángulo.



6.2. Vas a obtener el valor del número cordobés, que es el número irracional:

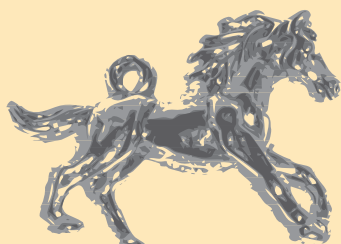
$$C = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

Para ello, observando la figura, vas a ir contestando a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo es el triángulo OMN? Aplica el teorema de Pitágoras y expresa MN en función del radio R.

b) Justifica que  $OP' = MN/2$ .

El teorema del cateto dice "En un triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella".

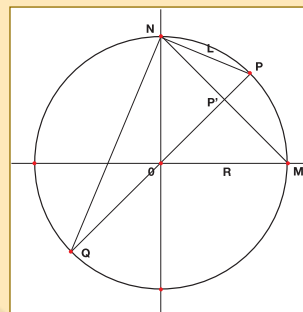




## 6. EL NÚMERO CORDOBÉS

c) En el triángulo NPQ que es rectángulo aplica el teorema del cateto para calcular L (lado del octógono regular).

d) Obtén el valor de  $C = \frac{L}{R}$



6.3. Vas a determinar sobre la recta real el número cordobés:

a) Construye una circunferencia de radio  $OA = \sqrt{2}$ .

b) Dibuja la bisectriz del ángulo COA, ¿Por qué mide  $22,5^\circ$ ?

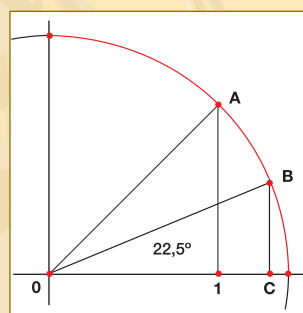
c) Demuestra que OC mide el número cordobés

$$C = \sqrt{2} \cos\left(\frac{45}{2}\right)$$

d) En trigonometría se cumple la fórmula:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

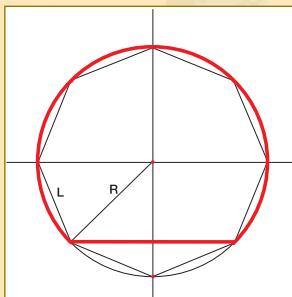
Deduce la expresión  $C = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$ .



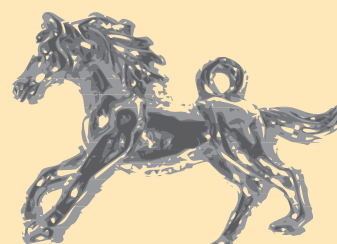
6.4. Encuentra que el número cordobés es una solución de la ecuación:

$$2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

6.5. Si dibujas un octógono regular y trazas el arco correspondiente a sus seis lados superiores obtienes el arco cordobés o más conocido como arco de herradura.



Haz el dibujo correspondiente y calcula el perímetro y el área encerrada.



## 7. MONEDAS EN LA EDAD MEDIA

El trueque fue la primera forma de llevar a cabo los intercambios comerciales.

Luego llegó la llamada “moneda natural”, una mercancía preciada, aunque abundante, cuyo valor estaba más o menos convenido: sal, ganado, herramientas, armas... Poco a poco, las primeras piezas metálicas realmente consideradas como monedas evolucionaron en su diseño hasta llegar a su forma circular.

Aunque la acuñación de moneda en la península Ibérica se remonta al siglo III a.C. analizaremos lo que ocurre en España durante la Baja Edad Media.



Se utiliza universalmente monedas de oro y plata, puesto que estos eran metales preciosos muy valorados y precisamente por eso cumplían las necesidades de un sistema monetario: el alto valor de cambio del oro y la plata significaba que algo muy costoso ocupaba poco espacio, lo que contribuía a facilitar el transporte y almacenaje, y aumentaba su utilización en el comercio internacional o entre regiones muy distantes.



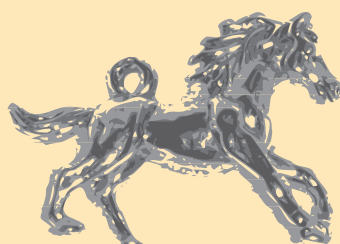
Muchas monedas se fabricaban en plata pura, pero como era tierna y blanda realizaron aleaciones con otros metales, como el cobre, así, la ley de una moneda es la proporción de metal precioso que contiene en relación con su peso total.

Actualmente la ley de la plata se mide en milésimas, y lo que llamamos “plata de ley” designa una plata de 925 milésimas, es decir, que de cada 1.000 unidades de aleación, 925 son de plata pura. La plata de Ley contiene un 92,5% de plata pura.

En la época medieval, la Ley de la plata se medía en dineros y granos. La plata pura tenía 12 dineros. Una plata de ley 1 dinero tenía una parte de plata y 11 de cobre, es decir, la ley de la plata indicaba la parte de las 12 de plata y el resto era de cobre. Una plata de ley 5 dineros tendría 5 partes de plata pura y 7 de cobre.

Posteriormente aparecieron algunos divisores del dinero: el grano, la meaja y la pueja, que tenían las siguientes equivalencias:

1 dinero eran 24 granos  
1 meaja eran 12 granos es decir,  $\frac{1}{2}$  dinero  
1 pueja eran 6 granos o  $\frac{1}{4}$  de dinero



Las monedas empezaron a devaluarse y la Ley pasó a expresarse en dineros y granos. Por ejemplo, una plata de ley 10 dineros y 8 granos tendría si lo expresamos en granos de un total de  $12 \times 24 = 288$  granos. Una cantidad de plata de  $10 \times 24 + 8 = 248$  granos. Tendría una cantidad de plata pura de 86,11%, es decir 86,11%.

## 7. MONEDAS EN LA EDAD MEDIA

Los Reyes Católicos establecieron que la Ley mínima para la plata tenía que ser de 11 dineros y 4 granos.

- 7.1. Averigua qué proporción de plata pura contenía. ¿Es mayor o menor que la que contiene actualmente la plata de Ley?

La fabricación de monedas en la Edad Media era una de las actividades industriales más prestigiosas, y los maestros que las hacían necesitaban conocer cómo calcular las proporciones de la aleación. Por ello, en los libros de aritmética de la época aparecían problemas sobre aleaciones para enseñar estos conceptos.

A continuación te proponemos unos problemas que aparecen en el libro en castellano de aritmética comercial más antiguo que se conoce y que es el manuscrito número 46 de la colegiata de san Isidoro de León.

- 7.2. Si te dicen que el rey manda labrar a 7 dineros de ley y tenemos dos platas, una de ley de 11 dineros y otra de ley de 2 dineros, ¿qué proporción tomarías de cada una de las dos platas para formar la aleación de 7 dineros?

Intenta tú resolver el problema, si no lo consigues esta es la solución explicada que aparece en el texto:

Si de 7 resta 2, quedan 5 y coloca el 5 debajo del 11; por otra parte, si de 11 restas 7, quedan 4 y coloca el 4 debajo del 2.

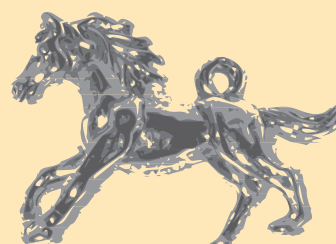
Como  $5 + 4 = 9$ , la respuesta es que para fabricar 9 marcos de plata de ley de 7 dineros tiene que tomar 5 marcos de ley de 11 dineros y 4 marcos de ley de 2 dineros.

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 11 \qquad 2 \\ 5 \qquad 4 \end{array}$$

- 7.3. Si tenemos plata de ley de 12 dineros ¿qué plata y qué cobre tomaremos para obtener una aleación de 6 dineros?

- 7.4. Si te dicen que el rey manda labrar a ley de 5 dineros y 4 granos y tenemos plata de 7 dineros y 5 granos ¿cuánto cobre tendremos que mezclar para que venga aleado a ley de 5 dineros y 4 granos?

- 7.5. Se combinan 4 lingotes de plata de leyes diferentes, 1 lingote de 5 marcos y ley de 9 dineros, otro de 6 marcos y ley de 8 dineros, otro de 7 marcos y ley de 9 dineros y uno de 8 marcos y ley de 3 dineros. ¿Cuál es la ley de la mezcla?



## 8. LA ARITMÉTICA: GASPAR NICOLÁS

Gaspar Nicolás fue un autor importante en el panorama de la aritmética portuguesa del siglo XVI. Los datos sobre su vida son escasos, pero su obra nos revela un matemático notable y un innovador imaginativo de la aritmética. A él se deben por ejemplo las primeras referencias al célebre matemático italiano Paccioli y también el primer esfuerzo para introducir en Portugal el sistema de notación árabe.

El libro más antiguo consagrado en Portugal a la Aritmética tiene por título *Tratado da prática Darismetica*, y fue publicado por primera vez en 1519, su autor era Gaspar Nicolás. En España, antes de aparecer en Portugal el libro de Gaspar Nicolás, habían sido publicados los tratados de Aritmética de Ciruelo, Juan de Ortega y Siliceo, sería interesante comparar estos libros con el del autor portugués.

Comienza este tratado con algunos capítulos en los que aparecen reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir números enteros y fraccionarios, para extraer raíces cuadradas de números enteros y para sumar progresiones. Siguen después numerosos problemas de los que el autor da las soluciones, empleando para ello la regla de tres, la regla de la falsa posición, etc. Algunos de estos problemas son de utilidad práctica, otros son interesantes curiosidades numéricas.

A continuación te proponemos algunos de los problemas que aparecían en este libro:

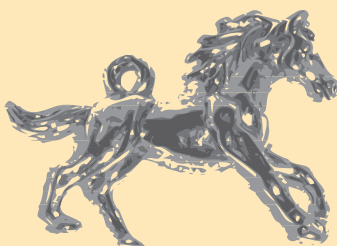
- 8.1. Un quintal de clavo vale 100 cruzados, uno de canela 60 y uno de jengibre 40. Llega un mercader que quería tanto de una especia como de otra pero sólo podía pagar 350 cruzados en total. ¿Qué cantidad comprará de cada especia?
- 8.2. Una pila tiene cuatro caños, destapando el primer torno se vacía en 6 horas. Tapando el primer torno y destapando el segundo se vacía en 5 horas y volviendo a tapar este y destapando el tercero se vacía dicha pila en 4 horas. Si tapamos el tercero y destapamos el cuarto se vacía la pila en tres horas. Ahora me pregunto, destapando a la vez los cuatro tornos, ¿en cuántas horas estará dicha pila vacía?

La mayor parte de las aritméticas publicadas en Europa a partir del siglo XIII contenían un problema de este tipo. Tenemos a continuación otra versión del problema que también aparece en el libro de Gaspar Nicolás:

- 8.3. Una nave va desde Lisboa hasta la isla de Madeira con las tres velas que tiene, usando sólo la vela más pequeña tardará en llegar a la isla tres días. Si utiliza para navegar la segunda vela, que es un poco mayor, tardará en llegar a Madeira 2 días, y si utiliza sólo la vela mayor, tardará en llegar a la isla 1 día. Ahora me pregunto, desplegando todas las velas y estando siempre el mar y el viento de la misma manera, ¿en cuántos días estará la nave en dicha isla?



- 8.4. Si te dijeran que un hombre quiere hacer una torre de piedra y un pedrero promete hacerlo en 3 días, otro pedrero promete hacerla en dos días y un tercero en un día. El señor de la torre manda que los tres trabajen juntos en la torre para hacerla en un tiempo más breve. Ahora me pregunto ¿en cuánto tiempo estará hecha dicha torre?





## 8. LA ARITMÉTICA: GASPAS NICOLÁS

La influencia del comercio marítimo llevó a muchos autores a presentar diferentes versiones de los mismos problemas como las que realizó Gaspar Nicolás. Estos problemas aparecen en las aritméticas europeas medievales y de la época renacentista y así mismo en los libros escolares del siglo XXI.

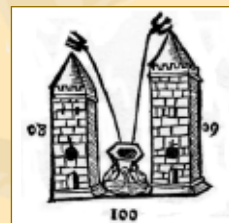
En el libro *Aritmetica práctica* de 1604 del español Jerónimo Cortés aparece el siguiente problema:

- 8.5. Si cuatro flamencos beben 10 cántaros de vino en 3 días y cinco españoles beben 20 cántaros en 6 días, se pregunta, bebiendo todos juntos, ¿en cuántos días acabarán un barril de 60 cántaros?

A continuación te proponemos unos cuantos problemas que también aparecen en el libro de Gaspar Nicolás y que podrás resolver usando el Teorema de Pitágoras:

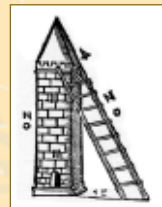
8.6. **Las dos torres y la fuente.**

Dos torres, de alto respectivamente 90 y 80 brazas, están separadas una de la otra por una distancia de 100 brazas. Entre ambas torres hay una fuente en tal lugar que dos aves que están colocadas cada una encima de una de las torres, se lanzan desde su torre al tiempo y llegan a la vez a beber a la fuente. ¿A qué distancia está situada la fuente de cada una de las torres?



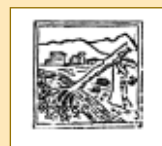
8.7. **La torre y la escalera.**

Una escalera tiene 20 brazas de alto y está apoyada sobre una torre que también mide 20 brazas. El pie de la escalera se encuentra a 12 brazas de distancia de la base de la torre. ¿Cuánto le falta a la escalera para llegar a la cima de la torre?

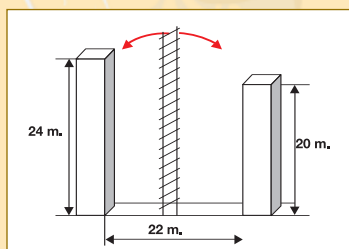


8.8. **El árbol quebrado.**

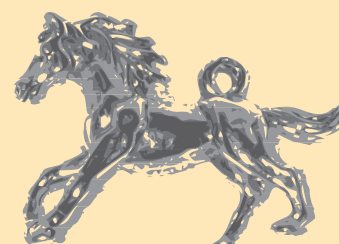
Un árbol de 50 brazas está al pie de un río de 30 brazas de ancho, pero un rayo cae sobre él y lo rompe de tal forma que la copa del árbol va a parar a la otra orilla del río. ¿Por dónde se quebró el árbol?



8.9. **La escalera entre las dos torres.**



Dos torres que miden de alto respectivamente 20 y 24 metros, están separadas una de la otra por una distancia de 22 metros. ¿En qué lugar entre las dos torres debe colocarse una escalera para que cuando la apoyemos en cualquiera de las dos torres llegue a la cima? ¿Cuánto debe medir la escalera de alto?





## 9. LA BARRACA VALENCIANA

La feraz huerta valenciana, que se extiende a lo largo de la costa, desde Carcagente hasta Sagunto, tiene zonas, como la de La Albufera, de características muy acusadas. La vivienda rural es la barraca, y en ella podemos distinguir los siguientes tipos: la barraca de huertanos, en la huerta propiamente dicha; la de pescadores, en la playa, y en La Albufera las dos modalidades.



El clima de Valencia y la fertilidad de sus tierras permiten varias cosechas al año, con un sistema de explotación intensiva que precisa una constante atención. Este es el motivo de que el huertano construya su vivienda al pie de su parcela, empleando, casi únicamente, con sentido de la máxima economía, los materiales que brinda la naturaleza: cañas, barro, juncos y carrizos.

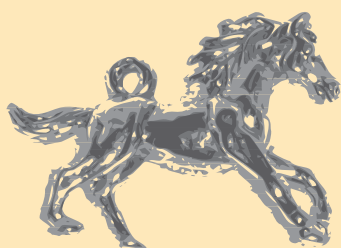
La barraca de la huerta responde a un tipo muy definido, que apenas ha sufrido variación con el paso del tiempo. Es de planta rectangular, de unos 9 x 5,50 m., y cubierta a dos aguas con caballete perpendicular a la fachada —casi siempre orientada al mediodía—, que está en uno de los lados menores.

La distribución es siempre parecida: una puerta, situada a un lado de la fachada, da acceso a un amplio paso, que recorre toda la longitud de la barraca y termina con otra puerta en la fachada opuesta, para facilitar la circulación de aire. Este corredor sirve de cocina, estancia y almacén de aperos.

En la otra crujía se distribuyen los dormitorios, generalmente tres. Al desván o andana, que antiguamente se destinaba a la cría de gusanos de seda, se sube por una escalera de mano.

Las paredes, de unos 2,50 m. de altura, se hacen con adobes, llamados gasons, que se colocan en asta entera o en media asta, según la economía que se persiga.

La cumbrera de la cubierta se remata con una cruz de madera en cada extremo. De este remate en cruz se ha escrito que, en el siglo XVI, pregonaba la calidad de cristianos viejos de los moradores de la barraca, frente a las habitadas por moriscos. Pero no hay pruebas suficientes para mantener esta teoría y, al parecer, se trata simplemente de un símbolo piadoso.



## 9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1. En las afueras de la ciudad donde vive Pedro hay una barraca muy antigua. Según le han informado a Pedro, la barraca es de planta rectangular y tiene una superficie de  $4.590 \text{ dm}^2$  además, se sabe que su longitud excede en  $3,9 \text{ m.}$  a su anchura. Con estos datos, averigua las dimensiones de la barraca.

9.2. El propietario de la barraca ha decidido embaldosarla con baldosas cuadradas.

a) ¿Cuál puede ser el mayor tamaño de las baldosas?

b) ¿Cuántas baldosas necesitará?

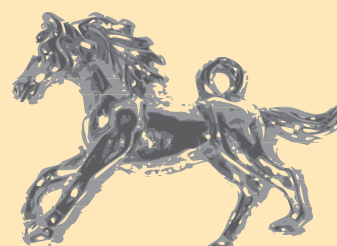
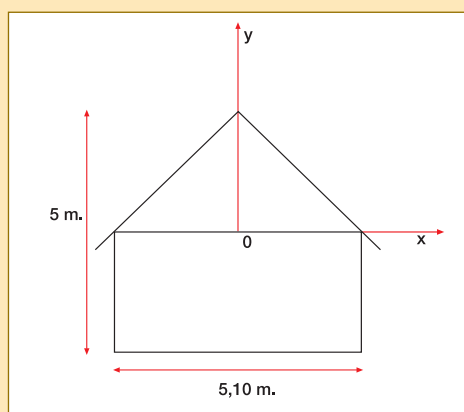
Nota: haz uso del resultado anterior.

9.3. El propietario también ha decidido pintarla. Para pintarla puede recurrir a un pintor que tardaría tres horas en hacer el trabajo o a un aprendiz que tardaría el doble. Si el propietario decide llamar a los dos para que trabajen juntos a la vez,

a) ¿Cuánto tiempo emplearán los dos en el trabajo?

b) Otra pareja de pintores (formada por un jefe y un aprendiz) tardaría 3 horas en pintar la barraca, si se sabe que el aprendiz tarda 1 hora más que el jefe, ¿cuántas horas tarda el aprendiz?

9.4. Teniendo en cuenta la figura, calcula las ecuaciones de las rectas que representan el suelo, las paredes laterales y el alerón del tejado de la barraca. Nota: ten en cuenta la situación del sistema de referencia. La altura del suelo a la andana es de  $2,5 \text{ m.}$



## 10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

La necesidad de saber la hora aún en los días nublados y por la noche, preocupó ya desde muy antiguo. Los relojes de agua se basaron en la regularidad del descenso de la superficie de un líquido contenido en un recipiente con un orificio pequeño de salida donde la velocidad de salida depende de la presión en el fondo del recipiente.

Amoutons fue el primero que construyó uno de estos relojes. Los egipcios emplearon estos relojes pero ya perfeccionados, pues tenían una polea y una cadena en la que sus extremos estaban unidos uno al flotador y el otro a un contrapeso. También utilizaron dos recipientes. Platón introdujo el reloj de agua en Grecia, en el año 157 a.C.

Clepsidra proviene del vocablo latino clepsydra, que a su vez deriva del griego klepsydra, compuesta de hydro (agua) y klepto (yo robo). La idea es que el recipiente inferior roba el agua (o la arena) del superior.

Solían estar formados por dos recipientes, de manera que el recipiente inferior recogiera el agua que salía del otro. Supongamos que los recipientes son cilíndricos.

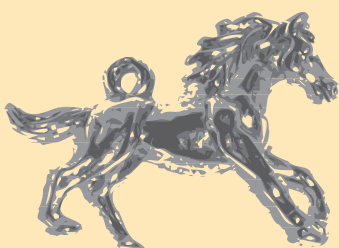


La velocidad de salida de un líquido depende, además de la sección del agujero, de la altura del agua (ley de Torricelli).

Para una “clepsidra” cilíndrica de base dada, el tiempo de vaciado es función de la altura del agua de acuerdo con la fórmula,

$$t = \frac{1}{k} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H})$$

siendo  $k$  un parámetro que mide la sección del agujero de salida.



## 10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

10.1. Si  $t = 6 - \sqrt{H}$  con  $H$  en cm. y  $t$  en minutos, es la función para una clepsidra determinada se pide:

- ¿Qué altura inicial tiene el agua? ¿Cuánto tarda en vaciarse?
- Expresa  $H=f(t)$  y representa la función.

10.2. Si en la ecuación de la clepsidra hacemos  $k=2$ . ¿Qué ocurre? ¿Por qué? Encuentra  $H=f(t)$  y represéntala.

10.3. ¿Cuánto habrá que aumentar el volumen inicial para que con este mayor agujero de salida tarde lo mismo en vaciarse. Encuentra la fórmula  $H=f(t)$  y represéntala.

10.4. Encuentra las fórmulas de  $t=f(H)$  y  $H=f(t)$  para una clepsidra de altura 64 cm. se vacíe en 20 minutos. Represéntalas conjuntamente. ¿Cómo son sus gráficas?

- Puedes utilizar el programa DERIVE para hacer las representaciones gráficas.

