

# SOLUCIONES

## 1. LOS IBEROS

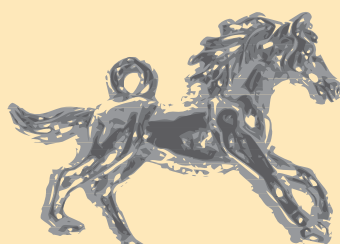
1.1.

13.2.37.5.2.73.2	FALCATA
37.2.43.5.11.2	LANCEA
73.67.2.17.79.37.2	TRÁGULA
71.2.17.79.43	SAGUN
37.53.67.23.17.2	LÓRIGA
17.2.11.71.79.41	GAUESUM

- 1.2. a)  $p = 2 \cdot \pi \cdot 30 = 18,84$  cm. y  $A = \pi \cdot 15^2 = 70,65$  cm<sup>2</sup>.  
 b) Un círculo tiene de superficie  $42,39/6 = 7,065$  cm<sup>2</sup>.  
 Como  $7,065 = \pi \cdot r^2$ , el radio vale 1,5 cm. y por tanto el diámetro 3 cm.  
 c) La anchura de cada corona es de 4 cm. las áreas son:  
 $A_1 = \pi(15^2 - 11^2) = 326,56$  cm<sup>2</sup> y  $A_2 = \pi(11^2 - 7^2) = 226,08$  cm<sup>2</sup>  
 d) Para el escudo romano  $2x \cdot x = 70,65$  y por tanto  $x = 5,94$  cm.  
 El escudo romano tiene un perímetro de 35,66 cm. casi el doble a pesar de tener ambas figuras la misma área.

- 1.3. a) El camino más corto de 1.284 km. puede ser M-A-B-E-A-M o M-A-E-B-A-M.  
 b) El tiempo empleado es  $822/100 = 8,22$  h. de viaje más 1,5 h. descargando las "damas" son 9,72 h. = 9 h. 43' 12".
- 1.4. Debes multiplicar la distancia en línea recta entre cada dos ciudades y expresarla en km.  
 a) En una escala 1:300000 se obtiene:

MADRID-ALBACETE	75 mm.	225 km.
ALBACETE-ELCHE	48 mm.	144 km.
ELCHE-BAZA	62 mm.	186 km.
BAZA-ALBACETE	65 mm.	195 km.
BAZA-MADRID	113 mm.	339 km.
ELCHE-MADRID	120 mm.	360 km.



# SOLUCIONES

- b) Los recorridos realizados por carretera quedan reducidos a 975 km. De todas formas el trayecto M-A-E-B-M es sólo de 894 km. E incluso el trayecto M-A-B-E-M de 966 km también es algo inferior.
- c) El tiempo empleado en la avioneta es  $994/300 = 2,98$  h. de viaje más las 3 h. en cada destino son 5,98 h. = 5 h. 58' 48".

## 2. MATEMÁTICAS RECREATIVAS EN EL SIGLO XVI

2.1. Pérez de Moya utiliza los siguientes símbolos:

co.	p.	n.	ig.
cosa (x)	más (+)	Número unidad Sin lectura	Igual (=)

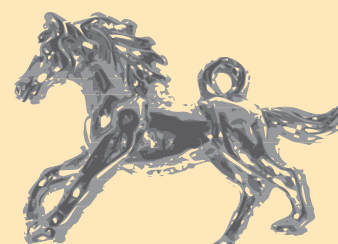
Con la notación actual sería:  $3x+4(x+5)=69$ ,  $7x+20=69$  que es la ecuación que aparece en el enunciado. Por tanto la solución es 7.

2.2. En el caso de 3, 5 y 8 hay dos soluciones:

8	8	3	3	6	6	1	1	4	
5	0	5	2	2	0	5	4	4	
3	0	0	3	0	2	2	3	0	
8	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3	0	3	0	3	1	1	0	3	0

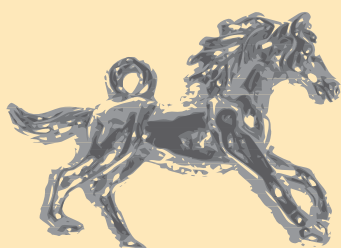
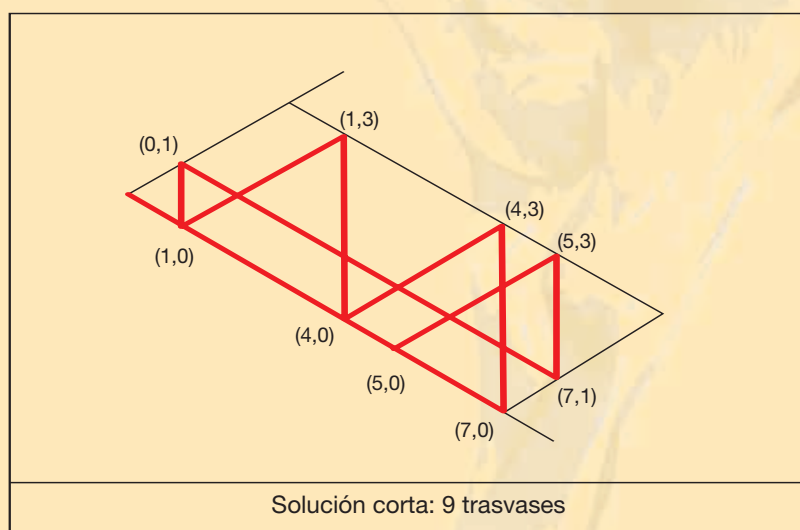
Hay un procedimiento gráfico para resolver problemas de este tipo que, normalmente, lleva a dos soluciones (una larga y otra corta).

Vamos a explicarlo para el caso 10, 7, 3. A la medida cuya capacidad es siete arrobas la llamaremos X y a la medida cuya capacidad es de tres arrobas Y. Trazamos dos ejes de coordenadas que formen un ángulo de 60 grados; sobre el eje de abscisas X llevaremos 7 divisiones y sobre el de ordenadas Y, 3. En el plano así definido podremos representar el estado de las dos

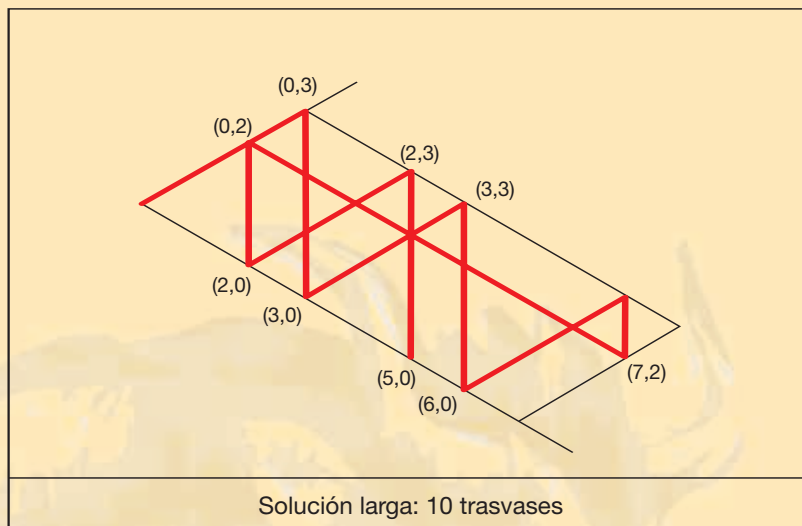


## SOLUCIONES

medidas X, Y, mediante un punto cuyas coordenadas sean los respectivos contenidos. Cada trasvase estará representado por un vector cuyo origen y extremo estarán determinados por los contenidos de ambas medidas en sus estados inicial y final, es decir, antes y después de cada trasvase. Los sucesivos trasvases que resuelven el problema formarán una cadena de vectores que unen los puntos siguientes por este orden:  $(0,0)$ ,  $(7,0)$ ,  $(4,3)$ ,  $(4,0)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(7,1)$ ,  $(5,3)$  y  $(5,0)$ . Observa que los extremos de los vectores quedan siempre en el perímetro del paralelogramo definido por los vértices de coordenadas  $(0,0)$ ,  $(3,0)$ ,  $(7,3)$  y  $(0,7)$ . El recorrido de los vectores se inicia en el origen de coordenadas, y se comporta igual que un rayo de luz que se fuese reflejando en los lados del paralelogramo como si estos fuesen espejos. Vemos, pues, que el problema se resuelve con 9 trasvases. La segunda solución (que requiere diez trasvases) la obtendríamos mediante el recorrido  $(0,0)$ ,  $(0,3)$ ,... Los números correspondientes a la cantidad a repartir y a las capacidades han de ser primos entre sí, de lo contrario, dividiendo por sus factores comunes, el problema quedaría reducido a otro análogo. Es evidente que la cantidad a repartir ha de ser siempre par. Siempre que la suma de las capacidades de las dos medidas sea igual a la cantidad a repartir, se observa que el número necesario de trasvases es igual al de la cantidad a repartir (solución larga); la solución corta tiene un trasvase menos. Por ejemplo, con los números 36, 19 y 17 necesitamos 36 y 35 trasvases.



# SOLUCIONES



10	10	3	3	6	6	9	9	2	2	5	
7	0	7	4	4	1	1	0	7	5	5	
3	0	0	3	0	3	0	1	1	3	0	
10	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5
7	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5
3	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3	0

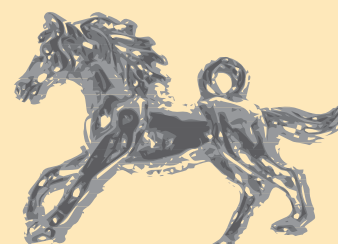
2.3. a)

9	9	5	5	1	1	0	9	6
4	0	4	0	4	0	1	1	4

b)

5/4	5/4	2/4
3/4	0	3/4

5/4	0	3/4	3/4	5/4
3/4	3/4	0	3/4	1/4



## SOLUCIONES

2.4. a)

24	24	19	8	8	8	8	8	8
13	0	0	0	11	13	13	8	8
11	0	0	11	0	0	3	3	8
5	0	5	5	5	3	0	5	0

b) Si consiguen 3 litros de horchata gratis:

9	9	5	3	3	3	3	3
5	0	0	0	2	5	3	3
4	0	4	4	4	1	1	3
2	0	0	2	0	0	2	0

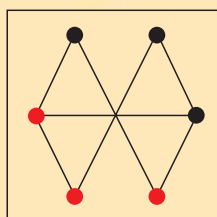
### 3. UN JUEGO MEDIEVAL: EL ALQUERQUE

3.1. Cuadrados:  $16+4+1+4+1=26$

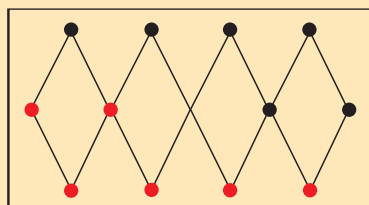
Triángulos:  $32+16+4+2=54$

3.2. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

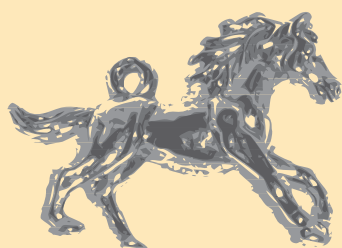
3.3. El tablero mínimo sería el siguiente:



El que sale primero pierde, pues el otro le “come” la ficha y a partir de ahí toda ficha movida por el primero se la “come” el segundo. El siguiente tablero sería:



Se trata de que el alumno/a investigue y contraste sus conclusiones con otros compañeros/as.





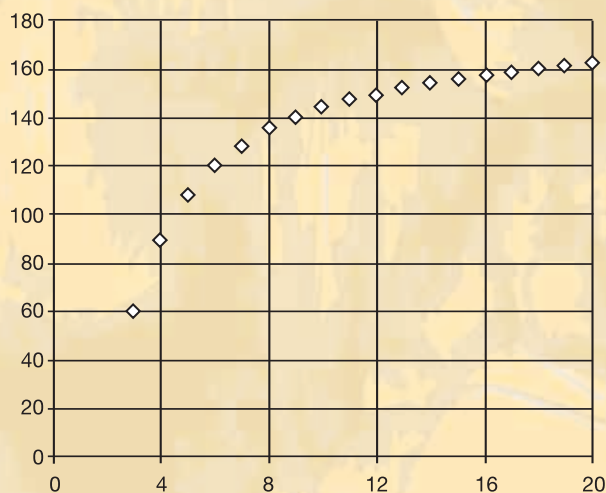
## SOLUCIONES

### 4. PEDRO SÁNCHEZ CIRUELO: POLÍGONOS ESTRELLADOS

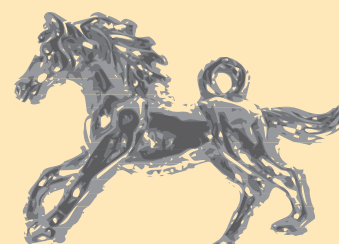
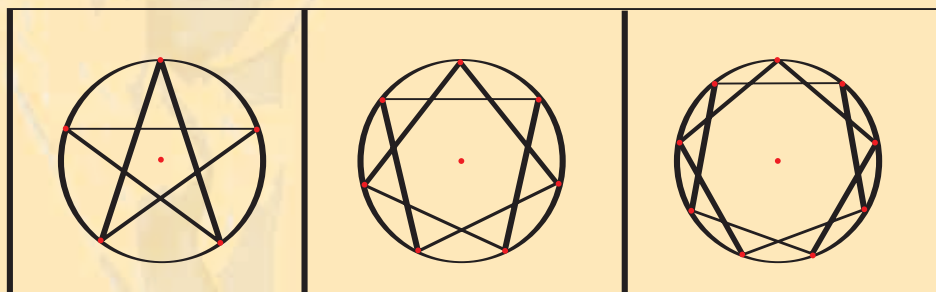
- 4.1. a) Los polígonos son el pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono y decágono. Sus ángulos interiores valen  $108^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $128,6^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $140^\circ$  y  $144^\circ$  respectivamente.

La fórmula es  $180 - \frac{360}{n}$  y por tanto para un polígono de 12, 30 y 360 lados el ángulo interior vale  $177,5^\circ$ ,  $168^\circ$  y  $179^\circ$  respectivamente.

- 4.2. La gráfica es la siguiente:



- 4.3. a) Algunos de los posibles polígonos estrellados son:



## SOLUCIONES

Se obtienen polígonos estrellados si  $n$  y  $k$  son primos entre sí, por ejemplo los arriba representados:  $\{5/2\}$ ,  $\{7/2\}$  y  $\{9/2\}$ . Por ejemplo  $\{9/3\}$  daría un triángulo equilátero igual al que se obtendría con  $\{3/1\}$ .

b)  $\{11/6\}$  y  $\{13/7\}$  darían los mismos polígonos estrellados. Habrás observado que  $\{n/k\}$  y  $\{n/(n-k)\}$  generan el mismo polígono.

4.4. a) En el caso de la figura  $\{5/2\}$  el ángulo  $b=360^\circ/5=72^\circ$ . Por tanto  $a=36^\circ$ . Análogamente para  $\{7/2\}$ ,  $\{7/3\}$  y  $\{9/5\}$  los ángulos son  $25,7^\circ$ ,  $25,7^\circ$  y  $20^\circ$ .

b) Para el hexágono se obtiene  $120^\circ$ . Para el polígono  $\{7/4\}=\{7/3\}$  se obtiene  $-25,7^\circ$  ó  $25,7^\circ$ . Para  $\{8/3\}$  es de  $45^\circ$  y para  $\{10/3\}$  es de  $72^\circ$ .

### 5. PEDRO NUNES: LA CONSTRUCCIÓN DE UN NÓNIO

5.2. Porque como el nóncio mide una unidad menos que la regla, cada unidad del nóncio mide 0,1 menos que la de la regla. Si coinciden las rayitas al cabo de tres unidades es porque hemos aumentado 0,3.

5.4. Si un lado mide  $x$ , el otro lado mide  $8-x$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= x \cdot (8 - x) = 12; & 8x - x^2 &= 12 \\ & & x^2 - 8x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

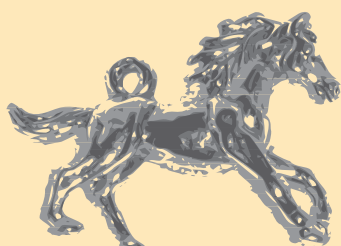
Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos que un lado mide 6 y el otro 2.

5.5. Si un lado mide  $x$  y el otro  $x+1$ :

a) La ecuación es  $x(x+1)=12$  que da  $x=3$  como solución válida.

b) La ecuación es  $x^2+(x+1)^2=5^2$  que da la misma solución.

Los lados miden uno 3 y el otro 4.



# SOLUCIONES

## 6. LA EVOLUCIÓN DEL AJEDREZ

6.1. Para calcularlo tenemos que sumar  $1+2+4+8+16+\dots$  así hasta 64 términos (las 64 casillas del tablero).

Son las 64 primeras potencias de 2, empezando en  $2^0$ .

Para sumarlas más fácilmente podemos fijarnos en lo siguiente:

$$1+2= 4-1 \quad (2^2-1)$$

$$1+2+4= 8-1 \quad (2^3-1)$$

$$1+2+4+8= 16-1 \quad (2^4-1)$$

$$\text{Luego: } 1+2+4+8+16+32+64+128+\dots = 2^{64}-1 = \\ = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

6.2. Problema 1:

1.- Tc3 Rc3, 2.-Te3 #

Problema 2:

1.- Ac4, 2.-Rb1 Ta1, 3.-Ra1 b2, 4.-Rb1 Ca3#.

Este es el famoso mate de Dil-Aram.

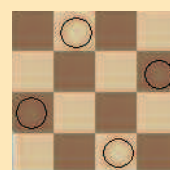
Problema 3:

1.- Cg7 Rf7, 2.-Tf1 Rg8 3.-Tf8 Rf8, 4.-C(g7)e6 Rg3, 5.-Tg2 Rf7, 6.-Tg7 Re8, 7.-Ce7 Rd8, 8.-C(c5)e6 Rc8, 9.-b7 Rd7, 10.-Af5#

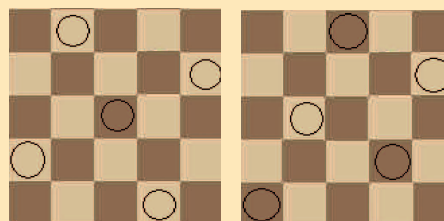
6.3. - En el tablero de 4x4 es suficiente colocar dos reinas para amenazar las 16 casillas.

- Se necesitan tres si el tablero es de 5x5

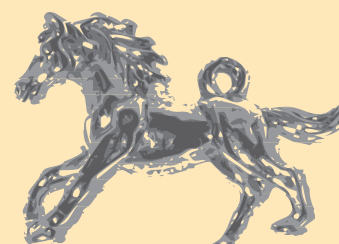
- Se pueden colocar 4 reinas en el tablero de 4x4 de la siguiente forma:



-En el tablero de 5x5 hay dos formas posibles de colocar las reinas:



6.4. En el primer caso hacen falta 8 movimientos y en el segundo son necesarios 16 movimientos.





# SOLUCIONES

## 7. MEDIDAS AGRARIAS ANTIGUAS

7.1. a) 320 brazas; b) 64,04 cuartones

7.2. 52.730 m<sup>2</sup>

7.3. a) Santiago; b) 1,77 veces

7.4. 16.900 m<sup>2</sup>

7.5. 130 m. x 130 m.

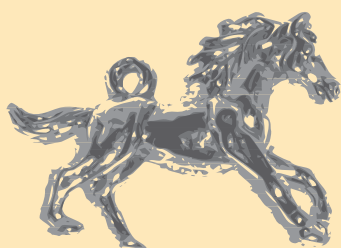
7.6. 2.646 naranjos en total; 130 naranjos por hanegada; 1.566 naranjos por hectárea.

7.7. 118,3 kg. de urea; 42,25 kg. de fosfato amónico 169 kg. de nitrato fosfórico.

7.8. 96,57 toneladas de estiércol.

7.9. 27%

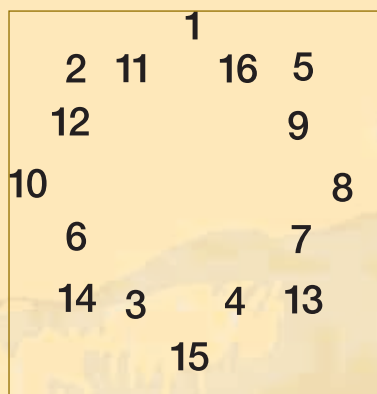
7.10. 16,25 cuartones; 15,6%



# SOLUCIONES

## 8. PASATIEMPOS Y AL-ANDALUS

8.1.

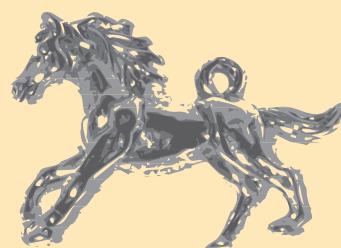


8.2.

M	E	Z	Q	U	I	T	A	A	L	G	E	B	R	A
A	S	T	R	O	N	O	M	I	A	F	R	I	S	O
G	R	A	N	A	D	A	A	V	E	R	R	O	E	S
A	Z	A	R	Q	U	I	E	L	C	O	R	D	O	B
A	L	H	A	M	B	R	A	M	O	S	A	I	C	O
A	L	G	O	R	I	T	M	O	A	V	I	C	E	N

8.3.

O	I	M	O	N	I	L	O	P	S	A	S	M
D	A	T	M	I	N	V	E	R	R	I	Z	M
E	N	C	I	R	D	I	A	T	O			S
N	T	E	R	M	C	U	L	S			O	A
C	I	R	C	U	N	F	O	E	E	N	C	I
D	A	E	T	N	E	I	D	R		P	H	C
L	A	N	O	I	C	A	R	N	T	A	O	O
D		I	N	F	I	N	I					



# SOLUCIONES

## 9. LA BARRACA VALENCIANA

- 9.1. a) El único múltiplo de 9 y 11 que sea par y menor que 200 es 198.  
b) Coinciden cada 120 días que es el MCD(8,12,15).

- 9.2. a)  $1.200 \cdot 0,05 = 60$  euros. b)  $60 \cdot 1,02^5 = 66,25$  euros.

- 9.3. a)  $9,5 \cdot 3/5 = 5,7$  m.  
b) Dimensiones de la ventana grande: 132 cm. x 60 cm. y dimensiones de la ventana pequeña: 88 cm. x 40 cm.  
c) Las superficies de la puerta, ventana grande y ventana pequeña son  $17.820 \text{ cm}^2$ ,  $7.920 \text{ cm}^2$  y  $3.520 \text{ cm}^2$  respectivamente. Si dividimos las áreas dos a dos observamos que están en una relación  $2,25 = 4/9$ . Por tanto la razón de semejanza de las áreas es el cuadrado de la de las longitudes.

- 9.4. a)  $A = 5,7 \cdot 2,5 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2,5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5,7 \cdot 2,5 \cdot 2 + 3,79 \cdot 9,5 \cdot 2 = 162,26 \text{ m}^2$

$$V = 5,7 \cdot 9,5 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 5,7 \cdot 2,5 \cdot 9,5 = 203,06 \text{ m}^3$$

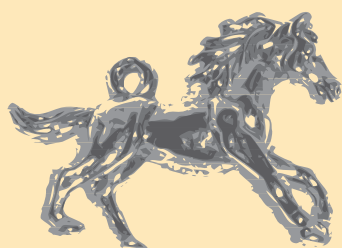
- b) La superficie a encalar es:  $90,25 - 13,222 = 77,028 \text{ m}^2$ . Por tanto necesita 8 botes.

- c) Como el MCD(6,15)=3 costará 24 euros.

## 10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

- 10.1. La fórmula del volumen del cilindro es  $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ .

- 10.2. Como  $1.500 = \pi \cdot 5^2 \cdot H$  entonces  $H = 19,09 \text{ cm}$ .



10.3. Como  $1.500 = \pi \cdot R^2 \cdot 9,55$  entonces  $R = 7,07$  cm.

Como  $1.500 = \pi \cdot R^2 \cdot 38,18$  entonces  $R = 3,53$  cm.

En consecuencia ni se hace el doble (10 cm.) ni se reduce a la mitad (2,5 cm.); varía bastante menos debido a que no es proporcional ( $R^2$ ). Si la altura es igual al diámetro, se tiene que:

$$1.500 = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot (2R) = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \text{ y por tanto } R = 6,20 \text{ cm.}$$

10.4. Como  $\frac{1.500}{125} = 12$ , resulta que cada 12 minutos se vacía. Habrá que agrandar el orificio de salida para que salga 4 veces más de agua por minuto, es decir,  $500 \text{ cm}^3$ .

10.5. Hay que hacer 12 marcas separadas 1,59 cm. ya que la altura es de 19,09 cm. En el segundo caso serán cada 6,36 cm.

10.6. Dentro de la simplicidad del mecanismo se debe conseguir que las marcas estén aproximadamente espaciadas y en el caso de anotar cada minuto deberán coincidir estas marcas de manera alterna con las marcas anteriores. En la medida que esto ocurra, la "clepsidra" será más precisa en la medición del tiempo.

