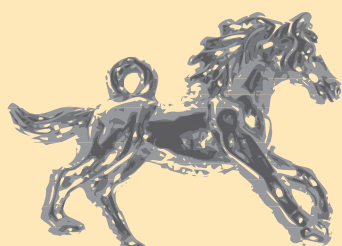


IBERIA

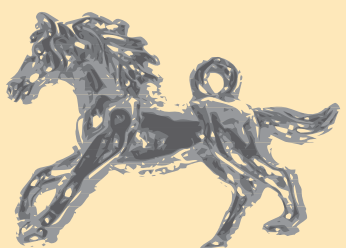
FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS

ACTIVIDAD	BLOQUE	CONTENIDOS
1. Juegos de dados: "Marlota" y "Riffa"	-Probabilidad	-Distribuciones de probabilidad
2. El álgebra: Savasorda	-Álgebra y Geometría	-Resolución de triángulos
3. Los árabes y el agua: la noria	-Análisis de funciones	-Funciones circulares
4. Juan Caramuel: inicio de la probabilidad	-Probabilidad	-Probabilidad compuesta
5. Horchata de chufa valenciana	-Aritmética y Álgebra	-Porcentajes, repartos
6. Ramón Llull y la combinatoria	-Combinatoria	-Números combinatorios
7. Al-Qalasadi: el principio de inducción	-Álgebra	-Principio de inducción
8. Los repartos y el talmud	-Aritmética y Álgebra	-Problemas de reparto
9. La barraca valenciana	-Análisis -Estadística -Geometría	-Funciones, regresión y trigonometría
10. La clepsidra: reloj de agua	-Análisis de funciones	-Funciones y cálculo integral

Bachillerato. Matemáticas, IBERIA



Bachillerato. Matemáticas, **IBERIA**



1. JUEGOS DE DADOS: "MARLOTA" Y "RIFFA"

Muchos de los juegos que conocemos, han llegado hasta nosotros gracias a Alfonso X, rey de Castilla y León, que nació en Toledo en 1221 y murió en Sevilla en 1284, reinando desde 1252 hasta su muerte.

Conocido como "El Sabio" por su importante contribución al campo de la cultura favoreciendo el intercambio entre las civilizaciones cristiana, musulmana y judaica a través de la "Escuela de Traductores de Toledo" que él mismo fundó.



En su reinado se elaboraron "Las tablas astronómicas alfonsíes" que fueron utilizadas por el mismo Copérnico.

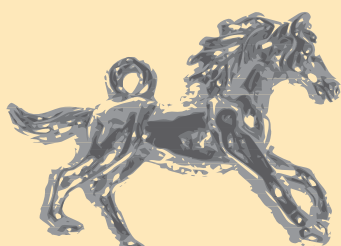
En lo referente a los juegos mandó producir "El libro del ajedrez, dados y tablas". Vais a conocer dos juegos de dados que vienen recogidos en ese libro.

MARLOTA

Un jugador lanza dos dados y la suma obtenida es su apuesta. Luego lanza de nuevo los dados y la nueva suma es la apuesta del contrincante. Finalmente lanza los dados sucesivamente hasta que la suma coincida con alguna de las dos apuestas. En ese momento termina la partida y gana el jugador que su apuesta coincide con el resultado.

En el juego no se consideran válidos los resultados con suma inferior a 7 o superior a 14.

- 1.1. Haz una tabla con todos los resultados posibles y su frecuencia. Calcula la probabilidad de cada uno de ellos.
- 1.2. Representa la distribución de probabilidad y calcula su media y su desviación típica.



1. JUEGOS DE DADOS: "MARLOTA" Y "RIFFA"

1.3. ¿Por qué crees que en el juego no se tienen en cuenta algunos resultados?

1.4. Si pudieras elegir un resultado para jugar contra tu contrincante, ¿cuál elegirías? Si tu número es el 8, ¿cuál debería tener tu contrincante para que el juego fuera justo?

1.5. Juega varias partidas con tu compañero o compañera.

Puedes utilizar una hoja de cálculo para contestar a las preguntas anteriores.

RIFFA

Un jugador lanza dos dados hasta que salgan iguales y luego lanza un tercer dado y anota la suma de los tres. Otro jugador hace lo mismo. Ganará el que obtenga la puntuación más alta.

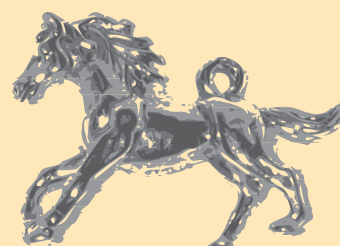
1.6. ¿Cuántos pares iguales hay al lanzar dos dados? ¿Qué probabilidad hay de que salga el par (3,3)? ¿Con qué frecuencia, aproximadamente, saldrá un par idéntico?

1.7. Haz una tabla de la frecuencia de la suma de los tres dados, considerando que los dos primeros son iguales.

1.8. Si mi par es el (2,2) y el de mi contrincante el (4,4), ¿qué probabilidad tengo de ganar cuando lancemos el otro dado? ¿Y si mi compañero ha sacado el (3,3)?

1.9. ¿Qué tiradas eliminarías para hacer el juego equiprobable?

1.10. Juega varias partidas con tu compañero o compañera.



2. EL ÁLGEBRA: SAVASORDA

En la Cataluña medieval hay que reservar un lugar de honor a **Abraham bar Hiyya**, más conocido por **Savasorda** (jefe de la guardia), matemático y astrónomo judío nacido en 1065 y muerto en 1136 en Barcelona.

Autor de una obra notable en hebreo, compuesta para iniciar en la ciencia árabe a las comunidades judías. En colaboración con **Platón de Tívoli** escribió *Liber embadorum* compuesto en hebreo y traducido por Tívoli al latín.

Trata de las ecuaciones de 2º grado. Es un tratado de agrimensura dedicado al cálculo de superficies. En dicho texto se encuentra la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

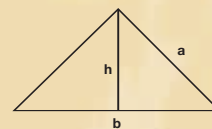
Aunque dicha fórmula era conocida ya por los agrimensores romanos, los occidentales verán su demostración en los *Verba filiorum Moysi* (*Banu Musa*) traducidos por **Gerardo de Cremona**.



Como reconocimiento a sus trabajos de Astronomía existe un cráter en La Luna con su nombre.

- 2.1. Uno de los problemas resueltos por Bar Hiyya fue determinar en un triángulo isósceles la base y la altura conociendo el área y el lado igual.

Con un poco de ayuda vas a demostrar las fórmulas que obtuvo este matemático judío.



Del triángulo de la figura se deducen las fórmulas:

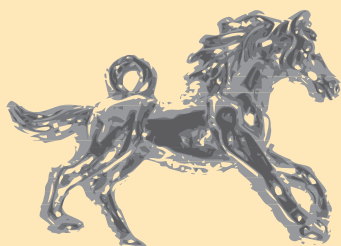
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad [I] \quad S = \frac{b \cdot h}{2} \quad [II]$$

a) A partir de $a^2 - 2S$ deduce $\frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2} = \frac{h}{2} - \frac{b}{4} \quad [III]$

b) Eleva al cuadrado, suma miembro a miembro $a^2 = h^2$.

y deduce la expresión $\frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{4} \quad [IV]$

- c) A partir de [III] y [IV] obtén las fórmulas para calcular h y b conocidos S y a.



2. EL ÁLGEBRA: SAVASORDA

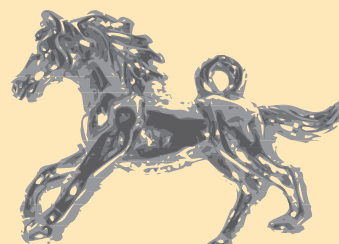
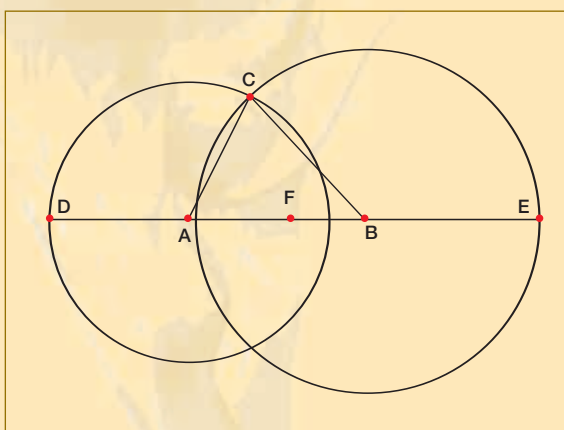
- 2.2. a) Aplica las fórmulas obtenidas para calcular la altura y la base de un triángulo isósceles en el que el lado igual mide 5 y el área 12.
b) Si sustituyes los datos en [I] y [II] tienes un sistema de ecuaciones. Resuélvelo y comenta los resultados.

- 2.3. Como ya sabes, Bar Hiyya conocía la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Vas a resolver el problema anterior utilizando exclusivamente esa fórmula:

- a) Expresa p , $p-a$, $p-b$ y $p-c$ en función de b .
b) Sustituye en la fórmula y resuelve la ecuación bicuadrada que obtengas.
c) Si te fijas en uno de los dos triángulos equiláteros expresa p , $p-a$, $p-b$ y $p-c$ en función de h y sustituye en la fórmula de Herón. Resuelve la ecuación.
- 2.4. Si conoces el programa Cabri podrás comprobar geoméricamente la fórmula de Herón:
- a) Dibuja un triángulo cualquiera de vértices A, B y C.
b) Dibuja un círculo de centro A y radio AC y otro de centro B y radio BC.
c) Prolonga la base AB hasta que corte a las circunferencias en D y E.
d) Determina el segmento DE y obtén su punto medio F y oculta los círculos.
e) El segmento DF es el semiperímetro.
f) Mide el área del triángulo, sus lados y el semiperímetro.
g) Con la calculadora comprueba la fórmula.



3. LOS ÁRABES Y EL AGUA: LA NORIA

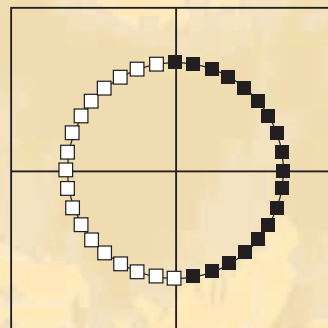
El agua es un elemento esencial sin el cual no puede entenderse la cultura islámica, siendo el recurso en base al cual se diseñan las ciudades musulmanas a partir de sus primeros tiempos.

El origen de las norias es muy antiguo. Marco Vitrubio Polión (siglo I a.C.) arquitecto romano al servicio del emperador Julio César nos da a conocer varios tipos de ruedas elevadoras de agua. Fue a través de los romanos como llegó a la Península Ibérica. Pero se debe a los árabes del período andalusí la difusión y perfeccionamiento a gran escala de este y otros procedimientos hidráulicos.

La noria es una rueda de la que penden unos recipientes que recogen el agua. Cada uno de estos recipientes recibe el nombre de cangilón o arcaduz. Esta denominación como la propia palabra "noria" son de origen árabe. El movimiento de la noria se consigue de manera hidráulica y en las norias más pequeñas por tracción animal.

El giro de la noria permite que los arcaduces vacíos se llenen al pasar por la corriente de agua y cuando llegan a la parte superior vuelquen el agua en un canal y así se consigue elevar el agua.

El esquema representa una noria con 36 arcaduces. Se han elegido los ejes de coordenadas de forma que el origen esté en el centro de la noria. La noria gira de derecha a izquierda, llenando de agua los arcaduces y vaciándolos al llegar a la parte más alta.



- 3.1. a) ¿Si el diámetro de la noria es de 12 m. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que describe la noria?

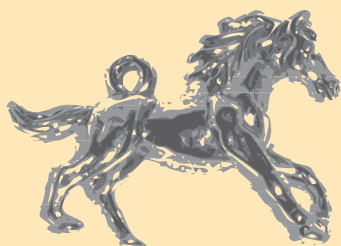
Vamos a numerar como el arcaduz 1 el que se encuentra en la parte derecha inmediatamente encima del eje horizontal.

- b) ¿Qué coordenadas tienen los arcaduces 3, 12, 27 y 33?

- 3.2. Si la noria da una vuelta completa cada 30 s. escribe las ecuaciones de las funciones que expresan:

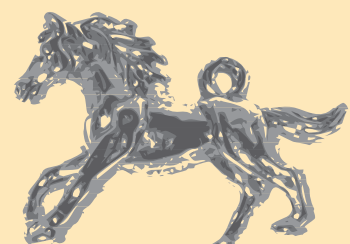
- a) La altura del arcaduz 36 en función del tiempo.
b) Distancia del arcaduz 36 al eje vertical de la noria en función del tiempo.

Representa las gráficas de las dos funciones.



3. LOS ÁRABES Y EL AGUA: LA NORIA

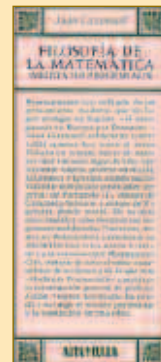
- 3.3. ¿Cuáles serían las funciones y sus gráficas correspondientes para el movimiento del arcaduz 6? Represéntalas conjuntamente con las primeras gráficas.
- 3.4. ¿Qué fórmulas y qué gráficas se obtendrían para una noria de 6 m. de diámetro? ¿Y si la noria inicial tardara 15 s. en dar una vuelta?
- 3.5. Los cangilones de la noria de la figura son cilíndricos.
a) Supongamos que su diámetro y su altura miden 30 cm. ¿cuál es su volumen?
b) Demuestra que, para un volumen dado, las dimensiones $R=H$ optimizan el gasto del metal de cangilón.
c) Si utilizáramos un cangilón de este tipo, ¿en cuánto se reduciría el coste?
- 3.6. Calcular para el tipo de arcaduz y una velocidad de una vuelta por minuto, la cantidad de agua elevada.
¿Y si se retiraran la tercera parte de los cangilones y así aumentara la velocidad en 10 s. por vuelta?
- 3.7. Diseña una noria que pueda elevar unos 600 litros por minuto, con las siguientes características:
a) velocidad superior a 2 vueltas por minuto.
b) Radio de la noria menor de 12 m.
c) Número máximo de cangilones 24.



4. JUAN CARAMUEL: INICIO DE LA PROBABILIDAD

España ha ido siempre con gran retraso en el conocimiento y estudio de las Matemáticas de los últimos siglos. Pero es en el origen del Cálculo de Probabilidades donde destaca Juan Caramuel Lobkowitz (1606-1682) célebre por su sabiduría y enciclopedismo.

Nació en Madrid y a los diecisiete años ingresó en la orden cisterciense. Cursó estudios en las Universidades de Alcalá, Salamanca y alcanzó el título de doctor en la de Lovaina. Cultivó las más variadas materias tales como las matemáticas, la astronomía, la arquitectura, la teología, etc., a las que su vasta cultura, propia de un hombre del Renacimiento, y gran ingenio dedicó más de dos centenares de obras.



- 4.1. Este problema fue analizado correctamente por Caramuel:
- ¿Cuántas sumas posibles hay al lanzar dos dados?
 - Calcula la probabilidad de cada una de las sumas posibles.

- 4.2. Una situación análoga pero más compleja es la que le planteó el Príncipe de Toscaza a Galileo: "¿Por qué cuando se lanzan tres dados, obtenemos con más frecuencia la suma 10 que la suma 9, aunque hay las mismas formas de conseguir 9 que 10?". ¿Sabrías explicarlo?

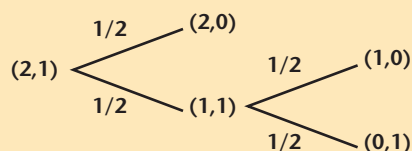
Caramuel tratará de resolver también el problema de la división de apuestas.

Veamos cómo lo expone: "Muchas veces ocurre que por motivos diversos, el juego se da por terminado. Y dirás ¿qué hay que hacer con los depósitos de dinero? Aquí está la pregunta y su solución: No sólo nos referiremos a los dados, sino también a la pelota y a cualquier clase de juegos, lo que merece que los examinemos con cuidado".

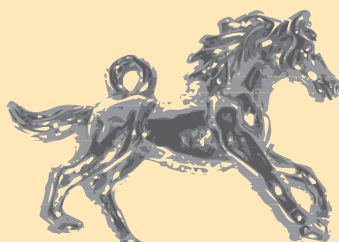


Y, a partir de este enunciado resolverá este problema de la división de apuestas entre dos jugadores de los que a uno le falta una partida para ganar y al otro 2, 3, 4... etc.

Si quedaran 2 apuestas a A y una apuesta a B designamos la situación mediante el par (2,1). Mediante el diagrama de árbol calculamos la probabilidad de ganar cada uno:



$$p(A) = \frac{1}{4} \text{ y } p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \text{ Luego el reparto ha de ser } 1:3.$$

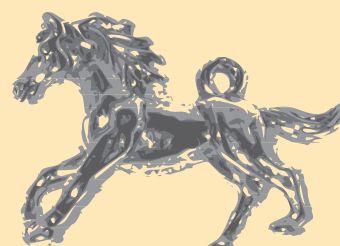


¡Caramuel no siguió este razonamiento!



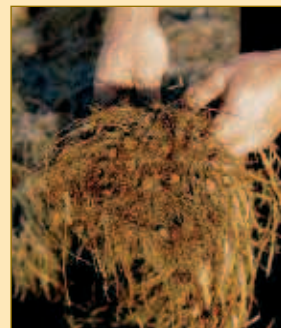
4. JUAN CARAMUEL: INICIO DE LA PROBABILIDAD

- 4.3. Resuelve los casos (3,1) y (4,1). Encuentra una ley general para el caso (n,1).
- 4.4. ¿Sabrías encontrar la solución para los casos (2,2), (3,2) y (4,2)?
- 4.5. Caramuel intentó resolver situaciones con tres jugadores equivocándose en la solución.
Utilizando la misma técnica que en el ejercicio anterior da el resultado correcto para el caso (2,1,1) y (2,2,1).
En el primer caso dio como reparto 2:5:5 y en el segundo 2:1:1.
- 4.6. Un último problema resuelto incorrectamente por Juan Caramuel fue el siguiente:
Se lanza un dado y gana el primero que obtenga un cierto número del 1 al 6. Al interrumpirse el juego surge la necesidad de averiguar la proporción en que se han de repartir lo apostado.
La respuesta de Caramuel es que se ha de repartir según las razones 37 a 35, respectivamente, entre A (el primero que debería seguir el juego) y B (el jugador que jugaría cuando fallara el otro).
a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane A en la primera tirada? ¿Y en la tercera? ¿Y en la quinta? ¿Y de que gane A?
b) Haz lo mismo para B e indica la proporción en que se han de repartir la apuesta.
- 4.7. Un problema de este tipo es que propuso a Blaise Pascal el caballero de Meré en 1654: *Dos jugadores: Antonio y Bernardo, ponen sobre la mesa 10.000 monedas cada uno. Un árbitro va a tirar un dado varias veces seguidas. Cada uno de los jugadores va a elegir un número entre el 1 y el 6. Antonio elige el 5 y Bernardo el 3. Se llevará las 20.000 monedas aquel cuyo número salga primero tres veces. Resulta que después de unas cuantas tiradas el 5 ha salido dos veces y el 3 sólo ha salido una vez. En este momento Bernardo recibe un mensaje por el que debe abandonar necesariamente la partida. ¿Cómo repartir de modo justo y equitativo las 20.000 monedas.*
Pascal pensó mucho, escribió a su amigo Fermat y por diferentes caminos dieron ambos con la misma solución del problema y con un montón enorme de ideas: la **Teoría de la Probabilidad** había comenzado.
Resuelve el problema que fue tan importante para el inicio del cálculo de probabilidades.



5. HORCHATA DE CHUFA VALENCIANA

El fruto seco que se llama "chufa" tiene su origen en el antiguo Egipto. Es una de las primeras cosechas domesticadas por los hombres. De hecho, los arqueólogos encontraban jarrones con chufas en las tumbas de los faraones. Los árabes introdujeron este tubérculo en tierras de la península durante los años 700 d.C. a 1200 d.C. Valencia fue la más apropiada para su cultivo, aunque se cultiva en toda España. Con las chufas se produce la horchata. Ésta es muy beneficiosa para la salud por ser altamente energética y diurética, con altos contenidos en hierro y potasio y no contener sodio.

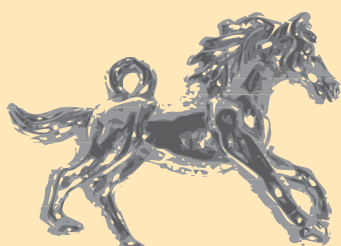


Cuentan que en cierta ocasión, una joven aldeana le dio a probar al Rey de Cataluña y Aragón. Complacido por su sabor, preguntó, "Que es això?" Y la joven respondió, "Es leche de chufa" (nombre original), a lo que el Rey rectificó diciendo, "Això no es llet, això es OR, XATA!" (Esto no es leche, esto es oro, guapa!).

Los ingredientes de una horchata son: chufas, azúcar, agua y canela de rama.

La chufa y el azúcar se utilizan en la misma proporción mientras que la cantidad de agua que se emplea es cinco veces la de chufa y azúcar.

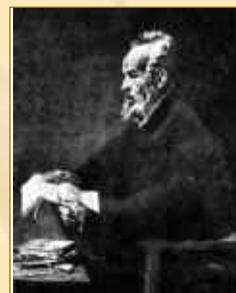
- 5.1. En una finca de cultivo de chufas ha llegado el momento de llevar a cabo la recolección. Para ello se utilizarán dos tractores distintos. Si estos tractores trabajaran juntos tardarían 8 días en completar la recolección. Pero si hubiera empezado un tractor arando la mitad de la finca y hubieran continuado los dos juntos arando la mitad restante, se hubiera hecho la recolección completa en 10 días. ¿Cuántos días tardarían cada tractor en arar la finca entera individualmente?
- 5.2. Las chufas recogidas se llevan a un almacén para que se sequen durante un tiempo. Una vez seco hay que llevarlas a una fábrica para la elaboración de horchata. El transporte lo realizan dos camiones. El segundo camión empieza a trabajar una hora después que el primero. Tres horas después que el primer camión ha empezado el trabajo queda aún por hacer $\frac{9}{20}$ del trabajo. Al terminar se observa que cada camión ha transportado la mitad de la cantidad. ¿Cuántas horas tardaría cada uno en hacer el trabajo individualmente?
- 5.3. El propietario de la finca después de realizar cálculos, advierte que el aumento en la producción en la finca comparada con la del año anterior es del 5 por 100 durante el primer año y del 8 por 100 durante el segundo. ¿Cuál será este porcentaje de aumento en el tercer año para que el aumento medio anual de la producción durante tres años sea igual al 10%?
- 5.4. En la fábrica donde se produce la horchata tienen dos depósitos que contienen una mezcla de agua y chufa. En el primer depósito la chufa y el agua están en la relación 2:11 y en el otro en la relación 3:7. ¿Qué cantidad se debe tomar en cada depósito si queremos obtener 100 litros de una mezcla en la que la proporción chufa-agua sea de 1 a 5?



6. RAMÓN LLULL Y LA COMBINATORIA

Ramón Llull nació en Mallorca en 1235 y murió en Túnez en 1316, casado y con hijos, fue un hombre que tenía todas las comodidades posibles, era rico, culto y ocupaba cargos importantes; alrededor de los 30 años decidió dedicarse radicalmente a la predicación de la "palabra de Dios", sobre todo en el mundo islámico. Hizo numerosos estudios teológicos y filosóficos, aprendió árabe para poder predicar a "los infieles" e incluso escribió libros en esta lengua.

Todos sus estudios y obras tenían el objetivo de explicar y demostrar la coherencia de la creación, la grandeza de Dios,... En este sentido se introdujo también en las matemáticas: la lógica simbólica tiene un papel muy importante en su obra "*Árbol de Ciencia*" (una verdadera enciclopedia), o el pensamiento combinatorio, que ejerció una gran influencia sobre matemáticos posteriores (como Leibnitz). En su obra "*Ars Combinatoria*" aparece por primera vez la denominación de combinatoria que hoy se usa.



Tuvo una vida muy agitada, estuvo encarcelado, hizo muchos viajes, publicó numerosas obras, incluso una antigua tradición dice que murió lapidado (apedreado) en Túnez por predicar el cristianismo.

Hagamos un breve recordatorio sobre los números combinatorios:

El número de combinaciones ordinarias de n elementos de un conjunto con m elementos ($m > n$) se designa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

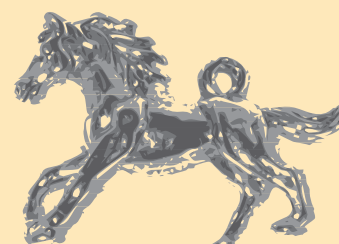
Ejemplo: ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un cubo?

Dado que en un cubo los ocho vértices están dispuestos de tal manera que no hay tres de ellos alineados, podremos formar tantos triángulos como subconjunto de tres elementos se puedan extraer de un conjunto de ocho. Es decir el número de triángulos que se pueden formar con los vértices de un cubo es igual a:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

El número de combinaciones con repetición de n elementos de un conjunto con m elementos se designa por $CR_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m+n-1,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$



6. RAMÓN LLULL Y LA COMBINATORIA

Ejemplo: Un abuelo, pensando en los regalos que ha de hacer a sus nietos, prepara bolsas conteniendo monedas de 0,2; 0,5; 1 y 2 euros con la condición de que cada bolsa contenga exactamente 20 monedas. ¿Cuántas bolsas distintas, atendiendo a la composición, puede preparar?

Evidentemente cada bolsa debe contener elementos repetidos, no diferenciándose las bolsas por el orden que ocupan las monedas en ellas; luego, se trata de combinaciones con repetición:

$$CR_{4,20} = \frac{(4 + 20 - 1)!}{20!(4 - 1)!} = \frac{23!}{20! \cdot 3!} = 1.771$$

6.1. Disponemos de 8 puntos de tal manera que no están alineados tres a tres. Se pide:
a) ¿Cuántas rectas determinan?
b) ¿Cuántos triángulos determinan?

6.2. ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono convexo de 20 lados?

6.3. Se tiene 10 puntos en un plano, 4 de ellos están en línea recta y no hay otro subconjunto de más de dos alineados. Hallar el número de triángulos que se obtienen uniendo estos puntos de todas las maneras posibles.

6.4. Disponemos de siete colores ¿De cuántas maneras puede pintarse un tetraedro regular, no mezclando colores ni pudiendo utilizar el mismo color para dos caras simultáneamente?

6.5. ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

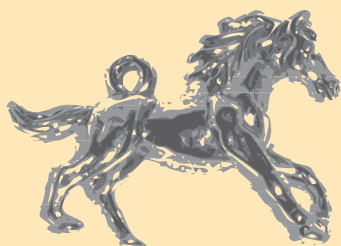
6.6. ¿De cuántas maneras podemos repartir a 10 alumnos en dos grupos de cinco miembros cada uno?

6.7. ¿De cuantas formas podemos colocar seis bolas indistinguibles en cuatro urnas numeradas?

6.8. Se dispone de 10 signos + y 6 -. ¿Cuántas alineaciones pueden hacerse, con todos los signos, de manera que nunca dos signos - estén consecutivos?

6.9. ¿Cuántas soluciones naturales tiene la ecuación del plano:
 $x + y + z = 6$?

6.10. Mi madre prepara bocadillos consistentes en una tortilla francesa que puede estar acompañada con alguno, ninguno o con todos los ingredientes siguientes: Longaniza, butifarra, queso, cebolla, mahonesa, tomate y pepinillos. ¿Cuántos tipos de bocadillos distintos puede preparar mi madre?



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Abu'l Hasn Ibn Ali **Al Qalasadi** fue un matemático español que nació en Baza (Granada) en 1412 donde vivió hasta ser capturado por los cristianos, murió en Beja (Túnez) en 1482.

Al-Qalasadi escribió varios libros entre los que destacan los de aritmética y álgebra. Calculó sumas de cuadrados y cubos de números naturales.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

Dedujo las siguientes identidades:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

La veracidad de estas identidades se puede probar utilizando el "Principio de inducción matemática", que es una técnica muy utilizada en matemáticas para demostrar la validez de algunas identidades en las que interviene una variable entera positiva n .

Veamos en que consiste este principio:

Sea $S(n)$ una proposición matemática dependiente de n (número entero positivo), para la cual se tiene que:

- (1) $S(1)$ es verdadera; es decir, 1 satisface la proposición.
- (2) Para todo K perteneciente a los números enteros positivos, si $S(k)$ es verdadera también lo es $S(k+1)$.

En esta situación, la proposición $S(n)$ es verdadera para todo n perteneciente a los enteros positivos.

- la condición (1) se llama base de inducción.
- la hipótesis "si $S(k)$ es verdadera" se llama hipótesis de inducción.
- la condición (2) se llama paso inductivo.

Veamos un ejemplo:

Demostrar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Sea $S(n)$ la proposición: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2$

- (1) $S(1)$ es verdadera, dado que $1 = 1^2$
- (2) $S(2)$ es verdadera, dado que $1+3 = 2^2$

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, arbitrario tal que $S(k)$ es verdadera. Es decir:

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$ (hipótesis de inducción)

veamos si $S(k+1)$ es verdadera. Para ello deberemos probar que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$$



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

En efecto:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) =$$

$$= (1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)) + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Por tanto: $S(k+1)$ es verdadera.

En virtud del principio de inducción se tiene que la proposición $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo n .

7.1. Utilizando el principio de inducción demuestra que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sea $S(n)$ la proposición: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(1) $S(1)$ es verdadera, dado que: $1^2 = \dots$

(2) Sea K un número arbitrario perteneciente a los enteros positivos, tal que $S(k)$ es verdadera. Es decir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \dots \quad (\text{hipótesis de inducción})$$

Veamos si $S(k+1)$ es verdadera. Para ello debemos probar que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

En efecto:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 =$$

$$= (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Realizando la suma y sacando factor común $(k+1)$ se llega a:

$$\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

Si a continuación factorizas el polinomio $(2k^2 + 7k + 6)$ se obtiene que $S(k+1)$ es verdadera y por tanto la proposición también.

7.2. Demuestra utilizando el método de inducción matemática la identidad:

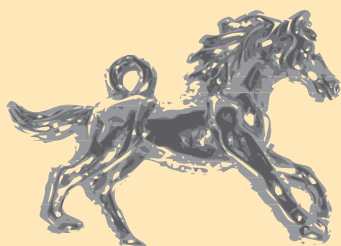
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

7.3. Demuestra por el método de inducción matemática la identidad:

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{n}{4(n+4)}$$

7.4. Demuestra por el método de inducción matemática la identidad:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

El reinado de Alfonso XII (1252 -1284) fue un periodo de intensa actividad científica y literaria dirigida por el mismo rey. Tuvo lugar un proceso de asimilación del conocimiento islámico y de recuperación de las obras griegas creándose una cultura en la que intervienen pensadores musulmanes, cristianos y judíos. Este proceso se desarrolló en especial en la *escuela de traductores de Toledo*, donde se tradujeron las principales obras filosóficas y matemáticas, como el Álgebra de Al-Jwaritzmi, el Canon de Avicena, Los elementos de Euclides y también el Talmud.



El **Talmud** es un documento de dos mil años de antigüedad que forma la base de la religión judía así como también de la ley criminal y civil. El Talmud está formado por dos tipos de enseñanzas: el Mishna y el Gemara. El Mishna recoge declaraciones cortas y muy concisas de la ley y el Gemara recoge comentarios y explicaciones sobre el Mishna.

Moshé Ben Maimon (1135-1204), también conocido como **Maimónides**, escribió un famoso comentario sobre el Mishná. Fue obligado a alejarse de su España natal por las persecuciones y se asentó en Egipto, donde trabajó en una importante recopilación de las leyes del Talmud.



En el Talmud aparecen ejemplos de un tipo de problemas que llamamos de bancarrota y que se producen cuando una persona o empresa no dispone de suficientes fondos para pagar a sus acreedores y hay que decidir cómo efectuar el reparto entre los acreedores.

En notación matemática un **problema de bancarrota** se expresa como un par (E, r) donde $E \in \mathbb{R}^+$ son los fondos para repartir y $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ es lo que piden cada uno de los n acreedores.

Se supone que lo que piden los acreedores es superior a lo que hay para repartir (sino no habría problema), es decir:

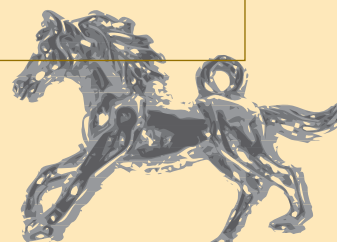
$$\sum_{i=1}^n r_i \geq E$$

Vamos a ver distintas formas de efectuar el reparto:

Regla Proporcional

Reparte el capital proporcionalmente a las demandas de los acreedores, la definimos $P(E, r)$, de forma que a cada acreedor le corresponde:

$$P_i(E, r) = \frac{r_i}{\sum r_i} \cdot E \quad \text{donde} \quad \sum r_i > 0$$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Ejemplo:

Imagina que una empresa ha quebrado y hay tres acreedores que reclaman $r_1=50$, $r_2=150$ y $r_3=200$ pero el patrimonio a repartir es sólo de 300 euros ¿qué parte le corresponde a cada uno?

$$p_1 = \frac{50}{400} \cdot 300 = 37'5$$

$$p_2 = \frac{150}{400} \cdot 300 = 112'5$$

$$p_3 = \frac{200}{400} \cdot 300 = 150$$

El siguiente ejemplo aparece en el Talmud:

- 8.1. Un hombre muere dejando tres mujeres con un contrato de casamiento cada una donde se especifica que en caso de muerte habrían de recibir 100, 200 y 300 respectivamente. Dependiendo de cuál es el patrimonio a repartir, el Talmud recomienda las siguientes soluciones:

Si el patrimonio a repartir es de 300 el reparto es proporcional.

Averigua que parte le corresponde a cada una de las esposas en este caso.

Regla Proporcional de los Derechos Truncados

Es parecida a la anterior, pero reparte proporcionalmente a los derechos truncados por el patrimonio:

$$PT_i(E, r) = \frac{r_i^t}{\sum r_i^t} \cdot E$$

$$r_i^t = \min(r_i, E) \text{ donde } \sum r_i > 0$$

A cada acreedor le asigna para calcular las proporciones lo que demanda si es menor que el patrimonio y si es mayor le asigna el patrimonio.

Imagina que quieres repartir un patrimonio de 200 entre tres acreedores que piden 50, 100 y 300.

$$r_1^t = \min(50, 200) = 50$$

$$r_2^t = \min(100, 200) = 100$$

$$r_3^t = \min(300, 200) = 200$$

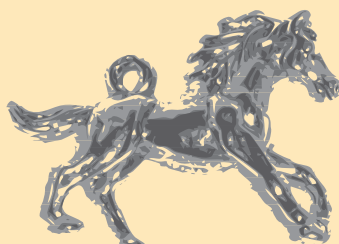
Luego el reparto será de:

$$50 + 100 + 200 = 350$$

$$PT_1 = \frac{50}{350} \cdot 200$$

$$PT_2 = \frac{100}{350} \cdot 200$$

$$PT_3 = \frac{200}{350} \cdot 200$$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Regla Igualitaria

Reparte el patrimonio en partes iguales: $I(E, r) = \frac{E}{n}$ donde n es el número de acreedores.

- 8.2. El Talmud recomienda la regla igualitaria en el problema 8.1. cuando el patrimonio es de 100, el Talmud. Calcula cuánto le corresponde en este caso a cada una de las mujeres.

Regla Igualitaria Restringida

Reparte el patrimonio en partes iguales, pero evitando que alguno de los acreedores reciba más de lo que le corresponde:

$$IR_i(E, r) = \min(r_i, \lambda) \text{ donde } \lambda \text{ es tal que } \sum \min(r_i, \lambda) = E$$

Esta regla fue defendida por muchos autores, entre los que se encuentra Maimónides. Supongamos que queremos repartir un patrimonio de 90 entre tres acreedores que demandan 20, 100, y 200. Si lo repartimos igualitariamente cada uno percibiría $\frac{90}{3} = 30$, tomaríamos $\lambda = 30$ pero de esta forma el primer acreedor recibe más de lo que pide, que es 20.

Para evitarlo, si ocurre esto, el acreedor se lleva lo que pide y volvemos a calcular λ repartiendo lo que tenemos, una vez descontado lo que corresponde al primero, entre los otros dos.

$$90 - 20 = 70; 70/2 = 35; \lambda = 35$$

$$\min(20, \lambda) + \min(100, \lambda) + \min(200, \lambda) = 90$$

20 35 35

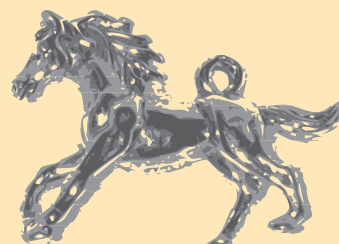
Recibe cada uno: $IR_1 = 20$ $IR_2 = 35$ $IR_3 = 35$

Regla Igualitaria Restringida de Pérdidas

Es la dual de la anterior, reparte igualitariamente las pérdidas, pero evitando que nadie pierda más de lo que pide:

$$IRP_i(E, r) = \max(0, r_i - \lambda) \text{ donde } \lambda \text{ es tal que } \sum \max(0, r_i - \lambda) = E$$

Vamos a suponer que tenemos que repartir por este procedimiento un patrimonio de 200, cuando los acreedores reclaman 100, 200 y 300 respectivamente.



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Para averiguar λ dividimos las pérdidas entre los 3: $(\sum p_i - E)/3$

$100+200+300=600$ son las pérdidas de los tres juntos.

$600-200=400$ (le restamos 200 que es lo que les van a pagar).

Posible $\lambda = 400/3=133$.

Pero el primer acreedor no puede perder más de lo que pide, que es 100, luego él perderá 100.

Recalculamos de nuevo el posible λ , pues el anterior no nos vale:

$500-200=300$; $300/2=150$; Posible $\lambda=150$

El segundo y el tercero perderán 150 cada uno. Calcularemos cuánto gana cada uno:

$$\begin{array}{ccccccc} \max(0; 100 - \lambda) & + & \max(0; 200 - \lambda) & + & \max(0; 300 - \lambda) & = & 200 \\ 0 & + & 50 & + & 150 & = & 200 \end{array}$$

El primero gana 0, el segundo 50 y el tercero 150.

- 8.3.** Un señor gana a la lotería y va a repartir el décimo entre sus amigos que reclaman 50, 150 y 200 €, pero ha decidido regalar casi todo el premio para una obra benéfica y sólo le quedan 100 €. Si hace el reparto según La regla igualitaria restringida de pérdidas, ¿qué le corresponde a cada uno?

Regla del Talmud

Esta regla es parecida a una que aparecía en el Talmud:

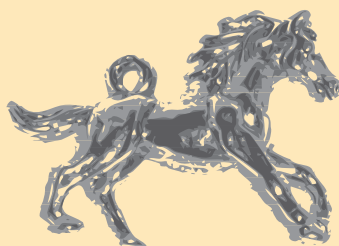
Para repartir hay que hacer lo siguiente:

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} \geq E \quad t_i = \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) = E$$

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} < E \quad \text{entonces } t_i = r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \left(r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) \right) = E$$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Caso primero:

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} \geq E \quad t_i = \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) = E$$

Por ejemplo, tenemos:

Vamos a pensar que tenemos que repartir un patrimonio de 200 entre tres acreedores que piden 100, 150 y 300.

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 150$$

$$r_3 = 300$$

y la cantidad a repartir es $E=200$

Lo primero que hacemos es sumar lo que piden entre los 3, y lo dividimos entre 2:

$$\frac{100 + 150 + 300}{2} = 275 > 200$$

Lo ideal sería que cada uno recibiera al menos la mitad de lo que pide, pero no hay suficiente, entonces se reparte de forma que todos reciban al menos la mitad de lo que pide el menor y ese no recibe más. Luego se reparte lo demás hasta que todos tengan la mitad de lo que pide el segundo etc.

$$t_1 = \min(50; \lambda) \quad t_2 = \min(75; \lambda) \quad t_3 = \min(150; \lambda)$$

Si repartimos por igual lo que hay entre los tres $\frac{200}{3} = 66,6 = \lambda$

Al primero le correspondería $\min(50; 66,6) = 50$ pues no puede ganar más de lo que pide, entonces le damos 50 y recalculamos el λ .

Repartimos lo que queda entre los otros dos:

$200 - 50 = 150$; $150/2 = 75 = \lambda$ y el segundo y tercero ganan 75.

$$t_1 = 50$$

$$t_2 = 75$$

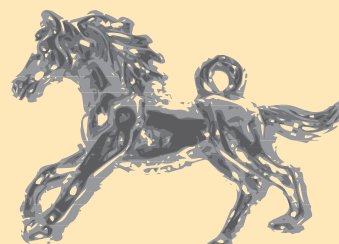
$$t_3 = 75$$

Nos estamos asegurando de que todos reciban la mitad de lo que les corresponde. Reparten hasta que todos tienen la mitad de lo que pide el primero, luego los otros dos reparten hasta que tengan la mitad de lo que pide el segundo, etc.

Caso segundo:

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} < E \text{ entonces } t_i = r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \left(r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) \right) = E$$



8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

Por ejemplo, tenemos:

$$E=290 \quad y \quad r_1=50 \quad r_2=100 \quad r_3=300$$

$$\frac{\sum r_i}{2} = \frac{450}{2} < 290$$

Cada uno puede ganar la mitad de lo que pide y el resto se lo pueden repartir (repartiendo las pérdidas).

$$T_1 = 50 - \min(25, \lambda)$$

$$T_2 = 100 - \min(50, \lambda)$$

$$T_3 = 300 - \min(150, \lambda)$$

A cada uno le quitamos como máximo la mitad de lo que pide, luego garantizamos que recibe al menos la otra mitad de lo que pide. p_i es la pérdida del individuo i .

$\sum p_i - E$ es lo que pierden entre los tres

$$50 + 100 + 300 = 450 \quad 450 - 290 = 160$$

Si se reparten las pérdidas por igual, cada uno pierde $\frac{160}{3} \approx 53$, luego $\lambda = 53$ y el primero y el segundo perderían más de lo que deben. Entonces el primero pierde 25 y el segundo 50 y lo que queda le corresponde al tercero.

$$T_1 = 50 - \min(25, \lambda) = 25$$

$$T_2 = 100 - \min(50, \lambda) = 50$$

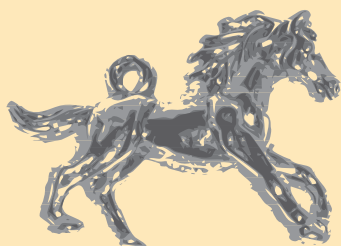
Como los dos primeros se quedan con la mitad de lo que les corresponde, recalculamos $\lambda = 160 - 25 - 50 = 85$

$$T_3 = 300 - \min(150, \lambda) = 300 - 85 = 215$$

Si todavía quedara algo que repartir, lo repartirían entre todos a partes iguales.

8.4. El problema del Talmud 8.1. cuando el patrimonio es de 200 lo reparte de esta forma. Intenta calcularlo.

El problema del Talmud está propuesto hace 2.000 años, pero en la actualidad los repartos siguen siendo fundamentales. En la unión europea, la producción láctea es una de las actividades económicas más importantes, la producción no es uniforme en todos los países y con el fin de estabilizar el mercado se utiliza el sistema de cuotas lácteas. Se fija la cantidad máxima de producción de la UE y basándose en esa cantidad limita la producción de cada estado. El problema de asignar una cantidad de producción a cada país se modeliza mediante este tipo de problemas de bancarrota.



9. LA BARRACA VALENCIANA

La feraz huerta valenciana, que se extiende a lo largo de la costa, desde Carcagente hasta Sagunto, tiene zonas, como la de La Albufera, de características muy acusadas. La vivienda rural es la barraca, y en ella podemos distinguir los siguientes tipos: la barraca de huertanos, en la huerta propiamente dicha; la de pescadores, en la playa, y en La Albufera las dos modalidades.



El clima de Valencia y la fertilidad de sus tierras permiten varias cosechas al año, con un sistema de explotación intensiva que precisa una constante atención. Este es el motivo de que el huertano construya su vivienda al pie de su parcela, empleando, casi únicamente, con sentido de la máxima economía, los materiales que brinda la naturaleza: cañas, barro, juncos y carrizos.

La barraca de la huerta responde a un tipo muy definido, que apenas ha sufrido variación con el paso del tiempo. Es de planta rectangular, de unos $9 \times 5,50$ m., y cubierta a dos aguas con caballete perpendicular a la fachada —casi siempre orientada al mediodía—, que está en uno de los lados menores.

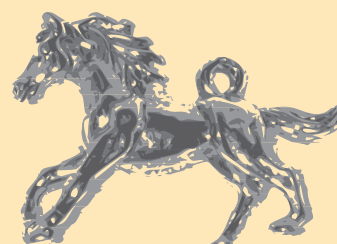
La distribución es siempre parecida: una puerta, situada a un lado de la fachada, da acceso a un amplio paso, que recorre toda la longitud de la barraca y termina con otra puerta en la fachada opuesta, para facilitar la circulación de aire. Este corredor sirve de cocina, estancia y almacén de aperos.

En la otra crujía se distribuyen los dormitorios, generalmente tres. Al desván o andana, que antiguamente se destinaba a la cría de gusanos de seda, se sube por una escalera de mano.

Las paredes, de unos 2,50 m. de altura, se hacen con adobes, llamados gasons, que se colocan en asta entera o en media asta, según la economía que se persiga.

La cumbrera de la cubierta se remata con una cruz de madera en cada extremo. De este remate en cruz se ha escrito que, en el siglo XVI, pregonaba la calidad de cristianos viejos de los moradores de la barraca, frente a las habitadas por moriscos. Pero no hay pruebas suficientes para mantener esta teoría y, al parecer, se trata simplemente de un símbolo piadoso.

9.1. En las afueras de la ciudad donde vive Pedro, hay una barraca muy antigua. Según se dice, el tejado de esta barraca se construyó de tal manera que el agua permaneciera en ella el menor tiempo posible. Calcula la inclinación que tiene el tejado.



9. LA BARRACA VALENCIANA

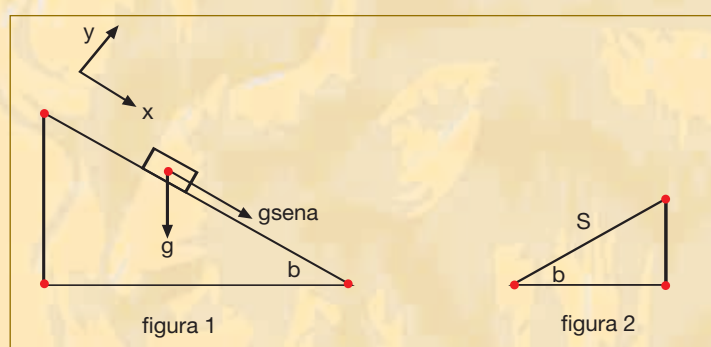
Nota:

La ecuación que expresa la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con movimiento uniformemente acelerado es:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{donde:}$$

- s_0 : posición inicial del cuerpo
- v_0 : velocidad inicial del cuerpo
- g : aceleración gravitatoria

La figura te ayudará a resolver el problema.

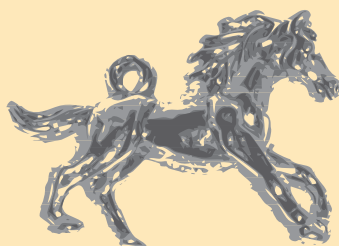


- 9.2. La siguiente tabla muestra las temperaturas medias dentro de la barraca anterior a lo largo del primer semestre de este año:

	E	F	M	A	M	J
Temperatura Máx. (x)	16	17	19	19	21	25
Temperatura Mín. (y)	7	10	12	13	15	19

- Calcula el coeficiente de correlación lineal. ¿Qué tipo de relación estadística existe entre las variables?
- Determina la recta de regresión de y sobre x.
- Para una temperatura máxima de 22° C. ¿Qué temperatura mínima cabe esperar? ¿y para una temperatura de 40° C?
- Para una temperatura mínima de 15° C. ¿Qué temperatura máxima cabe esperar?

- 9.3. Encima de la cumbrera de la barraca anterior, hay una cruz de madera cuyo tamaño se desea conocer. Para ello se ha lanzado una visual a la base de la cruz desde una cierta distancia, formando esta visual un ángulo de 60° con la horizontal. A continuación se ha lanzado otra visual al extremo superior de la cruz, siendo 61,5° el ángulo que esta visual forma con la horizontal. Sabiendo que la cumbrera se encuentra a una altura de 5 m. respecto del suelo. ¿Cuál es la longitud de la cruz?



10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

Uno de los inventos que más asombraba a las gentes que visitaban Toledo era el de dos clepsidras (relojes de agua) construidas por el astrónomo **Azarquiel** a las orillas del Tajo; estas clepsidras eran dos estanques que se llenaban coincidiendo con el plenilunio y se vaciaban con la luna nueva, de modo que los musulmanes de Toledo conocían por ellas el día del mes (los musulmanes se guiaban por meses lunares) y la hora. Los poetas las cantaron y algún ilustre visitante las calificó de «lo más maravilloso y sorprendente que hay en Toledo y que no tiene igual en el mundo habitado». En el año **1133**, un rey de Castilla quiso conocer los secretos del artificio y un astrónomo judío se ofreció a desmontar una de las clepsidras y a mejorarla, pero fracasó en su intento y la clepsidra no volvió a funcionar. La otra desapareció más tarde, y de ella no queda rastro, como no ha quedado de otros muchos artificios construidos por los ingeniosos sabios árabes.



En el caso de un depósito cilíndrico la disminución de la altura del agua no es uniforme en el tiempo. Debido a la ley de Torricelli desciende más rápido cuando el depósito está lleno y más lentamente cuando está casi vacío de acuerdo con la fórmula:

$$t = \frac{1}{k} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H})$$

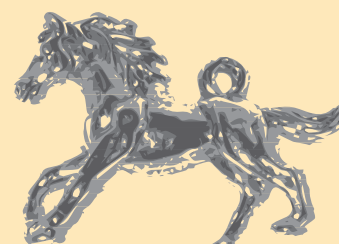
Para conseguir que el agua disminuya su altura intervalos iguales en tiempos iguales debemos cambiar la forma del depósito. Así haciendo unas sencillas marcas en la pared del mismo conseguiremos que se pueda utilizar como “reloj de agua” o “clepsidra”.

La forma del depósito es el obtenido al girar la curva $y = Ax^4$ alrededor del eje de ordenadas.

10.1. Representa la función para distintos valores del parámetro A y comenta los resultados.

10.2. La función que da el volumen en función de la altura es:

$VH_{\text{clepsidra}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}} \sqrt[3]{H}$ y la del cilindro de radio igual al de la sección máxima de la “clepsidra” es: $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot R^2 \cdot H$. Ten en cuenta que en la clepsidra $H = A \cdot R^4$. Calcula que porcentaje de agua puede almacenar la “clepsidra” respecto del cilindro.



10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

- 10.3. Una “clepsidra” posible es aquella que tenga una altura de 50 cm. y que su constante sea $A=0,0002$. La clepsidra se llena hasta los 48 cm. para evitar que desborde. Queremos que sirva para medir la duración de un día.

Construye en una hoja de cálculo la tabla que recoja cada dos centímetros: el radio de la clepsidra, el volumen de la clepsidra, el volumen del cilindro asociado, la relación entre volúmenes y la variación de volumen en la clepsidra cada dos centímetros de altura al ir vaciándose.

- 10.4. La propiedad característica de esta clepsidra es que el tiempo transcurrido es directamente proporcional a la pérdida de altura del depósito: $t=k(H_0-H)$.

Determina el valor de “k” para que cada 2 cm. de altura suponga 1 h. de tiempo. Representa la función.

- 10.5. El volumen obtenido al girar un tramo de curva $y=f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$ alrededor del eje x se obtiene mediante el cálculo integral: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

a) Considera la curva de la clepsidra “tumbada”. Para ello obtén su función recíproca.

b) Aplica esta fórmula para obtener el volumen de la clepsidra en función de la altura de agua.

