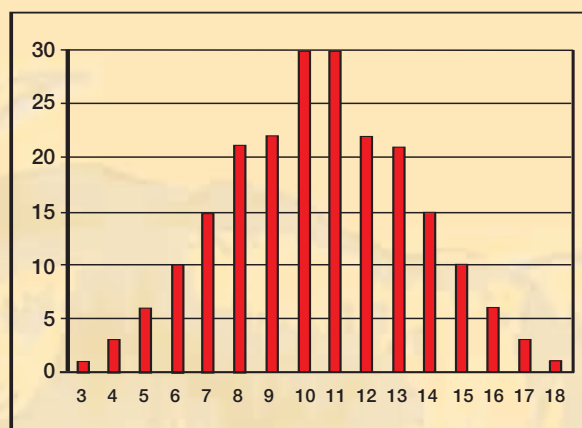


SOLUCIONS

1. JOCS DE DAUS: "MARLOTA" I "RIFFA"

1.1. S'ha utilitzat el full de càlcul Excel per a respondre a la pregunta.

suceso	frecuencia	probabilidad	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
3	1	0,005	0,0139	0,0417
4	3	0,014	0,0556	0,2222
5	6	0,028	0,1389	0,6944
6	10	0,046	0,2778	1,6667
7	15	0,069	0,4861	3,4028
8	21	0,097	0,7778	6,2222
9	22	0,102	0,9167	8,25
10	30	0,139	1,3889	13,889
11	30	0,139	1,5278	16,806
12	22	0,102	1,2222	14,667
13	21	0,097	1,2639	16,431
14	15	0,069	0,9722	13,611
15	10	0,046	0,6944	10,417
16	6	0,028	0,4444	7,1111
17	3	0,014	0,2361	4,0139
18	1	0,005	0,0833	1,5
totales	216	1,000	10,5	118,94



media	d.típica	jugadas posibles
10,5	2,95	81,48%

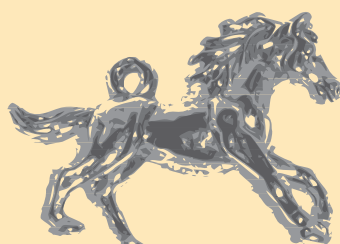
1.2. Igualment per a esta pregunta.

1.3. Per a agilitzar el joc s'han eliminat els resultats menys probable. Cal observar que els resultats entre 7 i el 14, ambdós inclosos, suposen el 81,48% del total dels resultats possibles.

1.4. Triaria el 10 o l'11 perquè són els successos que ocorren amb més freqüència. Caldria elegir el 14, que igual que el 8, ocorre 21 de les 216 resultats possibles.

1.5. Es pot organitzar un campionat entre els alumnes i alumnes de la classe.

1.6. Hi ha sis parells iguals (1,1), (2,2),...(6,6); La probabilitat d'obtindre un d'eixos parells és 1/36; Com la probabilitat d'obtindre un qualsevol d'eixos parells és 6/36, cada 6 tirades aproximadament apareixerà un parell doble.



SOLUCIONS

1.7.

	suma de los tres dados																	
2	3	4	5	6	7	8												6
4			5	6	7	8	9	10										6
6					7	8	9	10	11	12								6
8							9	10	11	12	13	14						6
10									11	12	13	14	15	16				6
12											13	14	15	16	17	18		6
totales	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1		36

1.8. En el primer cas només guanya si trac un 6 i el meu contrincant un 1, i guanyaria 8 a 7. Això suposa una probabilitat d'1/36.

En el segon cas, si la suma dels tres daus són: (2+4,4+1), (2+5,4+1), (2+5,4+2), (2+6,4+1), (2+6,4+2), (2+6,4+3) guanya "jo". Açò suposa una probabilitat de 6/36=1/6.

1.9. Els successos menys probable són les sumes 3, 4, 17 i 18 amb probabilitat 1/36 i les sumes 5, 6, 15 i 16 amb probabilitat 2/36. Eliminant estos successos tots els altres tenen la mateixa probabilitat 3/36=1/12.

1.10. Es pot organitzar un campionat entre els alumnes i alumnes de la classe.

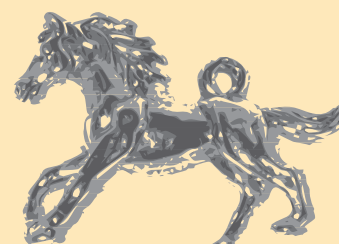
2. L'ÀLGEBRA: SAVASORDA

2.1. a) $a^2 - 2S = h^2 + \frac{b^2}{4} - 2bh = \left(h - \frac{b}{2}\right)^2$, per tant $\sqrt{a^2 - 2S} = h - \frac{b}{2}$

i finalment $\frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2} = \frac{h}{2} - \frac{b}{4}$

b) $\frac{a^2 - 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2$ i sumant m.a.m. $\frac{a^2 - 2S}{4} + S = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{bh}{2}$

i operant $\frac{a^2 + 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}\right)^2$ i finalment $\frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{4}$



SOLUCIONS

c) Sumant ambdós expressions: $h = \frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2}$

Restant i multiplicant per 2: $b = \sqrt{a^2 + 2S} - \sqrt{a^2 - 2S}$

2.2. a) Si el costat igual mesura 5 i l'àrea 12 es té: $h=7/2+1/2=4$ i $b=7+1=8$.

b) Si resollem el sistema $12 = \frac{b \cdot h}{2}$ i $25 = \frac{b^2}{4} + h^2$ s'obté l'equació biquadrada $b^4 - 100b^2 + 2.304 = 0$ que dona dos solucions $b=8$ y $b=6$.

Açò suposa que les altures són $h=3$ i $h=4$.

La solució que no apareix en la fórmula de Bar Hiyya es deu a no considerar el doble signe de les arrels quadrades.

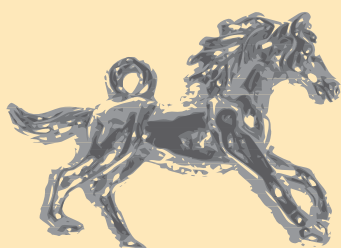
2.3. a) Expressant en funció de b es té:

$$p = 5 + \frac{b}{2}, p - a = \frac{b}{2}, p - b = \frac{b}{2} \text{ i } p - c = 5 - \frac{b}{2}$$

b) Substituint en la fórmula d'Herón $12 = \sqrt{\left(5 + \frac{b}{2}\right) \frac{b}{2} \frac{b}{2} \left(5 - \frac{b}{2}\right)}$ i operant s'obté l'equació que dona les solucions $b=8$ i $b=6$.

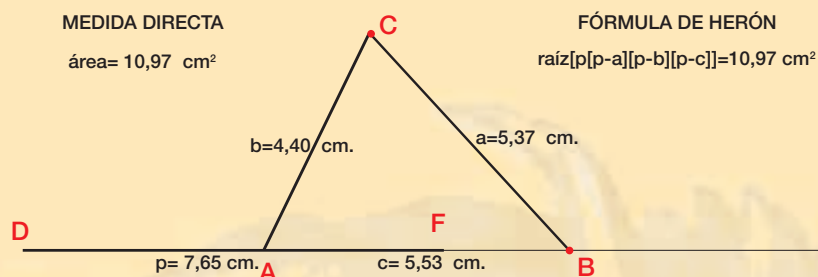
c) Prenent $b=8$, $p = \frac{9+h}{2}$, $p-a = \frac{h-1}{2}$, $p-b = \frac{h+1}{2}$ i $p-c = \frac{9-h}{2}$

Substituint en la fórmula d'Herón i operant s'obté l'equació $h^4 - 82h^2 + 657 = 0$ que dona com a solució vàlida $h=3$.



SOLUCIONS

- 2.4. La solució amb Cabri és: Modificant els costats del triangle sempre es complix la fórmula d'Herón.



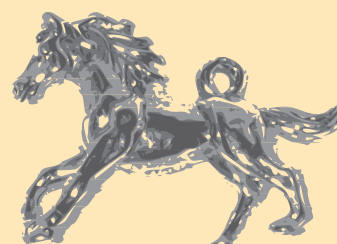
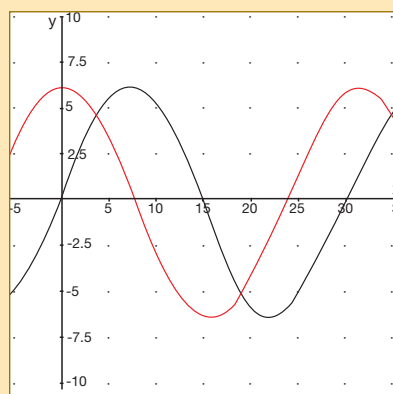
3. ELS ÀRABS I L'AIGUA: LA SÉNIA

- 3.1. a) Al triar eixe sistema de referència l'equació és $x^2+y^2=6^2$.
b) Prenent l'origen d'angles propi de la trigonometria es té:

canó	3	12	27	33
angle	30°	120°	270°	330°
x	5,20	-3	0	5,20
y	3	5,20	-6	-3

- 3.2. L'altura és una funció "sinus" i la distància una funció "cosinus" d'amplitud 6 i període 0,30:

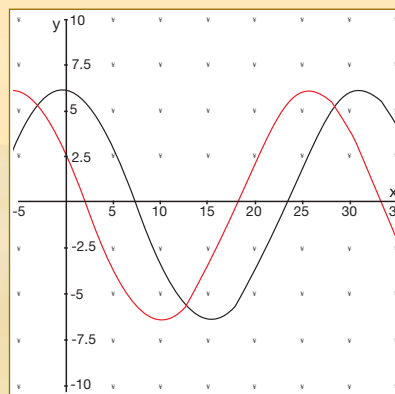
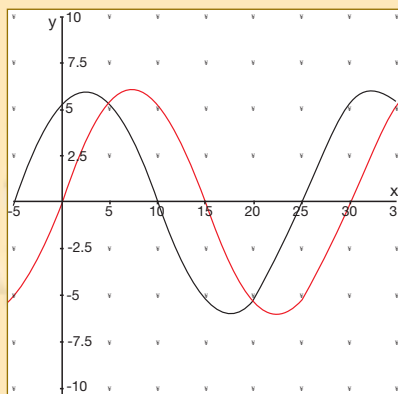
$$h = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right) \quad d = 6 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right)$$



SOLUCIONS

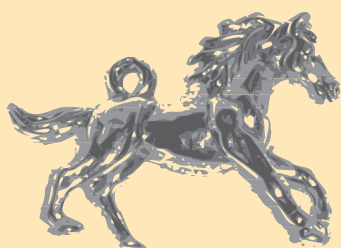
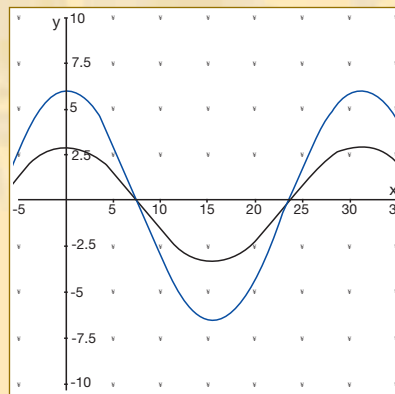
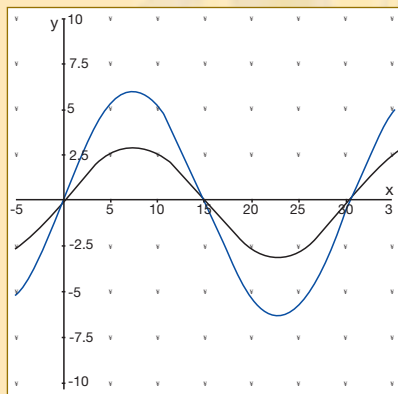
3.3. El canó 6 té un "desfasament" de 60° :

$$h = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30} + \frac{2 \cdot \pi}{6}\right) \quad d = 6 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30} + \frac{2 \cdot \pi}{6}\right)$$



3.4. La sènia de 6 m. de diàmetre té una amplitud 3:

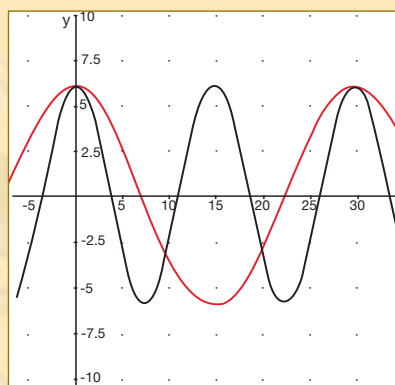
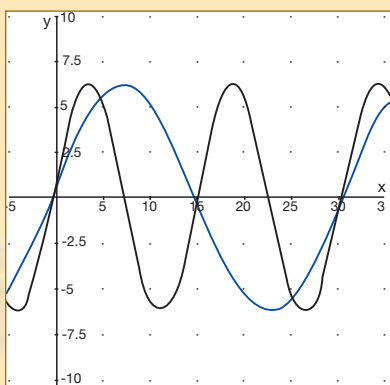
$$h = 3 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right) \quad d = 3 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right)$$



SOLUCIONS

Si pega una volta cada 15 s., el seu període és la mitat:

$$h = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{15}\right) \quad d = 6 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{15}\right)$$



3.5. a) $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 30 = 21.206 \text{ cm}^3 = 21,206 \text{ l}$

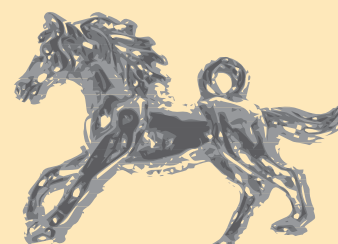
b) Es tracta d'un problema d'optimització:

Si $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ [I] és el volum del cilindre i $S = 2\pi \cdot R \cdot H + \pi \cdot R^2$ la superfície metàl·lica es té: $S = \frac{2 \cdot V}{R} + \pi \cdot R^2$.

Derivant i igualant a zero: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ i reemplaçant en [I] s'obté $H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

La derivada segona garantix que és un mínim: $S'' = \frac{4 \cdot V}{R^3}$.

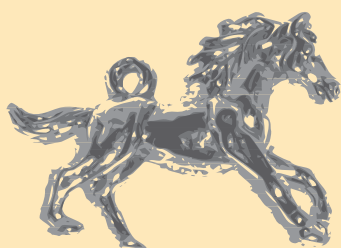
c) Amb les dimensions inicials $S = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 30 + \pi \cdot 15^2 = 3.534,29 \text{ cm}^2$ de chapa. Però si $R=H$ i ha de contindre 21.206 cm^3 d'aigua, es té: $21.206 = \pi \cdot R^3$ i $R=H=18,90 \text{ cm}$. Per tant $S = 3 \cdot \pi \cdot R^2 = 3.366,62 \text{ cm}^2$. Açò suposa un estalvi d'un 5%.



- 3.6. Al donar dos vueltas per minut i disposar de 36 canons de 21,206 litres es té: $21,206 \cdot 36 \cdot 2 = 1.526,8$ litres. Si es retiraren 12 canons però la duració del gir fóra 20 s. el resultat seria el mateix: $21,206 \cdot 24 \cdot 3 = 1.526,8$ litres.
- 3.7. Es pretén que l'alumne/ dissenye una sènia tenint en compte les variables que s'indiquen. Haurà de definir la grandària del canó, el nombre de canons tenint en compte la grandària de la sènia etc.

4. JUAN CARAMUEL: INICI DE LA PROBABILITAT

- 4.1. Les sumes possibles són 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i 12. Les probabilitats de cada succés són $1/36$, $2/36$, $3/36$, $4/36$, $5/36$, $6/36$, $5/36$, $4/36$, $3/36$, $2/36$ i $1/36$ respectivament.
- 4.2. Al llançar 3 daus hi ha 216 possibilitats. La suma 9 es presenta en els casos (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3) i la suma 10 en (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4). Açò suposa 6 ternes per a cada aposta i aparentment dos successos igualment probable. Però com les ternes amb dos elements iguals representen 3 casos i les de tres elements diferents de 6 casos depenent del dau, llavors $p(9) = 25/216$ i $p(10) = 27/216$.
- 4.3. Per mitjà del diagrama d'arbre corresponent:
- En el cas (3,1): $p(A) = \frac{1}{8}$ i $p(B) = \frac{7}{8}$. Repartiment 1:7.
- En el cas (4,1): $p(A) = \frac{1}{16}$ i $p(B) = \frac{15}{16}$. Repartiment 1:15.
- En general (n,1): $p(A) = \frac{1}{2^n}$ i $p(B) = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Repartiment $1:2^n - 1$.



SOLUCIONS

- 4.4. En el cas (2,2) el repartiment és 1:1 com és lògic.
En el cas (3,2) el repartiment és 5:11.
En el cas (4,2) el repartiment és 6:26 o 3:13.

- 4.5. Per mitjà del diagrama d'arbre corresponent:
En el cas (2,1,1) el repartiment és 4:4:1.
En el cas (2,2,1) el repartiment és 5:5:17.

- 4.6. a) El jugador A guanyarà a la 1^a, 3^a, 5^a,... tirada:

$$p(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{6} \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{6}{11}$$

- b) El jugador B guanyarà a la 2^a, 4^a, 6^a,... tirada:

$$p(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{11}$$

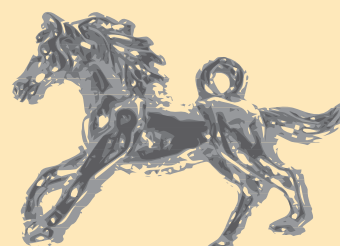
Després el repartiment de l'aposta serà 6:5.

- 4.7. Si analitzem la probabilitat del pas (1,2) -> (0,2) suposa que Antonio guanyaria si isquera 5 en la 1^a tirada, o en la segona si en la primera no haguera eixit el 5 ni el 3 perquè hauria guanyat Bernardo, i així successivament:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Després el pas (1,2) -> (1,1) té la mateixa probabilitat i la mateixa el pas (1,1) -> (1,0) o el pas (1,1) -> (0,1).

Per tant és un cas idèntic a l'exemple d'introducció, i en conseqüència el repartiment ha de ser 3:1 i com han posat 20.000 monedes, li correspondrien 15.000 monedes Antonio i 5.000 monedes a Bernardo. Cal observar que si ens fixàrem en un repartiment proporcional a les partides guanyades o a les partides que falten per a guanyar la proporció seria 1:2.



SOLUCIONS

5. ORXATA DE XUFA VALENCIANA

- 5.1. Siguen x e y els dies que tardaria cada tractor per separat, llavors plantegem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{8}{x} + \frac{8}{y} = 1 \\ \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

El primer tractor tardarà 12 dies mentres que el segon tardarà 24 dies.

- 5.2. Siguen x e y els dies que tardaria cada tractor per separat i t el temps que estan els tractors treballant simultàniament, llavors plantegem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20} \\ \frac{t+1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{t}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Si eliminem el temps en les dos últimes equacions, obtenim el sistema format per la primera equació i l'equació: $x-y=2$.

El primer camió tardarà 10 hores i 8 hores el segon.

- 5.3. Si el percentatge demanat: p

Producció de l'any inicial : x

Producció en el primer any: $1,05x$

Producció en el segon any: $(1,05x) \cdot 1,08 = 1,134x$

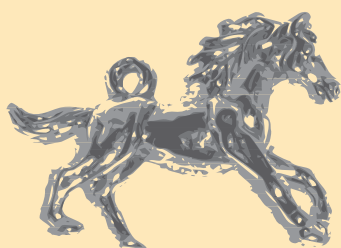
Producció en el tercer any:

$(1,134x) \cdot (1+p/100) = 1,134x + 0,01134px$

Plantegem l'equació:

$$\frac{(1,05x - x) + (1,134x - 1,05x) + 1,134x + 0,01134px - 1,134x}{3} = 0,1x$$

Obtenint-se el 14,64%.



SOLUCIONS

- 5.4. Siga "x" la quantitat que pren del primer depòsit i "100-x" la que pren del segon. Llavors plantegem l'equació:

$$\frac{2}{13}x + \frac{3}{10}(100 - x) = 20 \text{ i obtenim } 68,42 \text{ litres en el primer depòsit i } 31,52 \text{ litres en el segon depòsit.}$$

6. RAMÓN LLUL I LA COMBINATÒRIA

6.1. a) $C_{8,2} = 28$ b) $C_{8,3} = 56$

- 6.2. $C_{20,2} - 20 = 170$ (els 20 vèrtexs es poden unir de $C_{20,2}$ maneres per a obtenir les diagonals però després cal restar a esta quantitat els vèrtexs consecutius ja que estos no formen diagonals sinó els costats del polígon).

6.3. $C_{10,3} - C_{4,3} = 116$

6.4. $C_{7,4} = 35$

6.5. $C_{8,2} = 28$

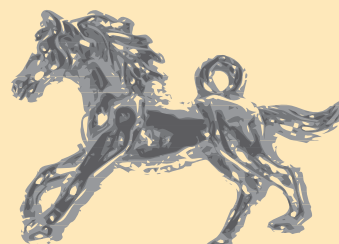
- 6.6. $C_{9,4} = 126$ (Siguen A, B, C, D, E, F, G, H, I els 10 alumnes. Si separem un d'ells, per exemple el A, ens queda un conjunt de 9 elements, d'eixe conjunt es poden extraure $C_{9,4} = 126$ subconjunts de 5 elements. Cada un de tals subconjunts definix un subconjunt de 6 elements: el que està integrat pels 5 elements sobrants).

6.7. $C_{9,6} = 84$

6.8. $C_{11,6} = 462$

6.9. $C_{8,6} = 28$

6.10. $128 (C_{7,0} + C_{7,1} + C_{7,2} + \dots + C_{7,7} = (1+1)^7)$



SOLUCIONS

7. AL-QALASADI: EL PRINCIPI D'INDUCCIÓ

7.1. Es tracta de completar la demostració.

$$7.2. 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$7.3. \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 5}$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(k+3)(k+4)} + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{k}{4(k+4)} + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{k+1}{4(k+5)}$$

$$7.4. 1 \cdot 4 = 1(1+1)^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k+1) + (k+1)(3(k+1)+1) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$$

8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

8.1.

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 200$$

$$r_3 = 300 \quad E = 300 \quad \sum r_i = 600$$

$$p_1 = \frac{100}{600} \cdot 300 = 50$$

$$p_2 = \frac{200}{600} \cdot 300 = 100$$

$$p_3 = \frac{300}{600} \cdot 300 = 150$$

8.2. Regla Igualitària

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 200$$

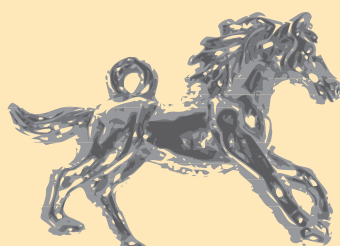
$$r_3 = 300 \quad E = 100$$

$$l_1 = \frac{100}{3} = 33,3$$

$$l_2 = \frac{100}{3} = 33,3$$

$$l_3 = \frac{100}{3} = 33,3$$

A cada una li correspondria 33,3



SOLUCIONS

$$r_1 = 50$$

8.3. Regla Igualitària Restringida de pèrdues. $r_2 = 150$

$$r_3 = 200 \quad E = 100$$

- Calculem el que perden entre els tres: $(50+150+200)-100=300$.
- Si ho repartixen per igual entre els tres, perd cada un $300/3=100 = \lambda$ (possible λ).
- El primer no pot perdre 100 perquè és més del que li deuen, llavors perd 50 i ho descomptem de les pèrdues per a calcular λ .
- Pèrdues = $350 - 100 = 250$ les repartim entre els altres dos $\lambda = 250/2 = 125$.

$$\begin{array}{ccccccc} \max(0; 50 - \lambda) & + & \max(0; 150 - \lambda) & + & \max(0; 200 - \lambda) & = & 100 \\ 0 & + & 25 & + & 75 & = & 100 \end{array}$$

Al primer li correspon 0, al segon 25 i al tercer 75.

8.4. Regla del Talmud

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 200$$

$$r_3 = 300 \quad E = 200$$

$$100 + 200 + 300 = 600 \quad \frac{600}{2} = 300 \geq 200$$

Suposem que repartim E entre els tres a parts iguals:

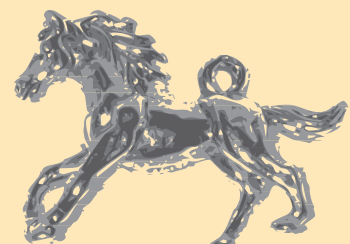
$$\frac{200}{3} = 66,6 = \lambda \text{ però al primer li correspon 50, després recalculem}$$

$$\lambda: 200 - 50 = 150; \quad 150/2 = 75 = \lambda$$

$$t_1 = \min(50; \lambda) = 50$$

$$t_2 = \min(100; \lambda) = 75$$

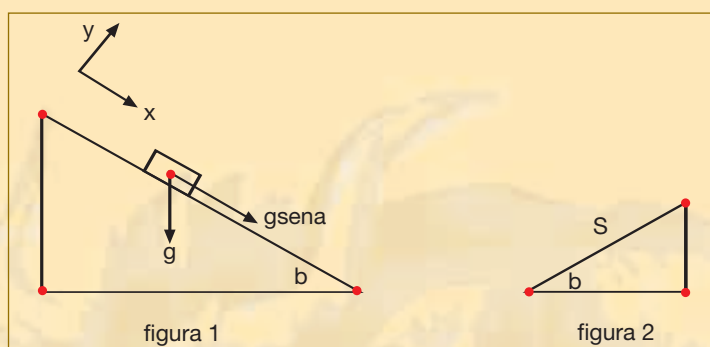
$$t_3 = \min(150; \lambda) = 75$$



SOLUCIONS

9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1.



Sabem que la distància recorreguda per un objecte que es mou amb moviment uniformement accelerat és: $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

De la figura 2 es dedueix que:

$$\cos b = \frac{x}{s} \quad s = \frac{x}{\cos b}$$

Substituint en l'equació anterior (i tenint en compte que $s_0 = 0$ y $v_0 = 0$) tenim:

$$\frac{x}{\cos b} = \frac{1}{2} g t^2 \sin(b) \Rightarrow 2x = g t^2 \sin(b) \cos(b)$$

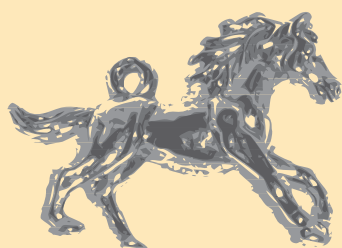
$$\Rightarrow 2x = g t^2 \frac{\sin(2b)}{2} \Rightarrow 4x = g t^2 \sin(2b) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4x}{g \sin 2b}}$$

Perquè t es mínim, $g \sin(2b)$ ha de ser el més gran possible, la qual cosa succeeix quan $\sin(2b) = 1$ i per tant: $2b = 90^\circ$ $b = 45^\circ$.

9.2. a) $r = 0,981$. La relació és directa al ser $r > 0$.

b) $y = 1,27x - 12,13$.

c) Cal esperar una temperatura mínima de $15,81^\circ\text{C}$. Per a una temperatura de 40°C el resultat que obtinguem no serà fiable ja que eixa temperatura s'allunya de les temperatures donades en la taula.



SOLUCIONS

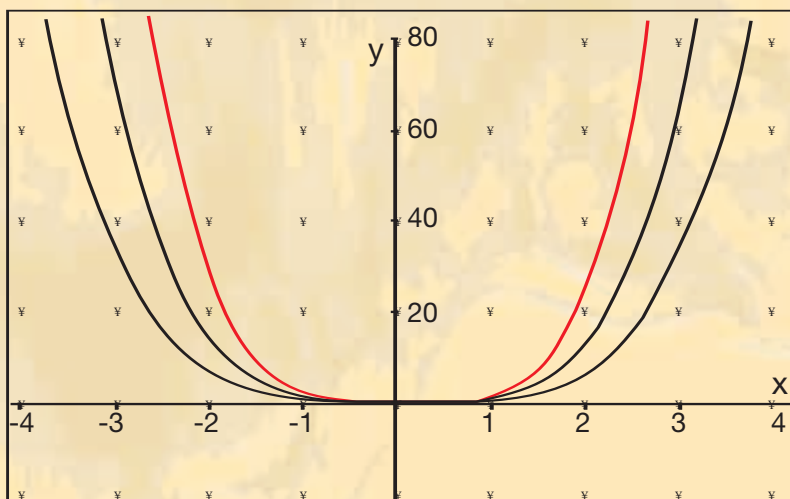
d) La temperatura será de $21,3^{\circ}\text{C}$ (en la ecuación de la recta de regresión de *y sobre x*, despejar la "x" y sustituir el valor de la "y").

9.3. Si anomenem "h" a l'altura de la creu i "d" a la distància a la barraca

es verifica:
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(60) = \frac{500}{d} \\ \operatorname{tg}(61,5) = \frac{500 + h}{d} \end{cases} \quad \text{d'on } d = 2,89 \text{ m. y } h = 31$$

10. LA CLEPSIDRA: RELLOTGE D'AIGUA

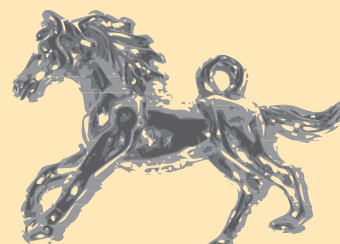
10.1. A l'augmentar el valor del paràmetre la gràfica se "obri" la gràfica, és a dir, creix més lentament.



10.2. Expressarem el volum del cilindre en funció de H.

Tenint en compte que $R^2 = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{A}}$, substituint en el volum del cilindre

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{H}{A}} \cdot H = \frac{\pi}{\sqrt{A}} H^{\frac{3}{2}}. \quad \text{Per tant la relació és sempre } \frac{V_{\text{clepsidra}}}{V_{\text{cilindro}}} = \frac{2}{3}.$$



SOLUCIONS

10.3.

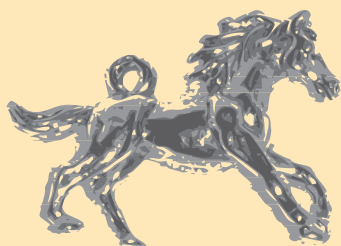
TIEMPO	ALTURA	RADIO	V.CLEPSIDRA	V.CILINDRO	PORCENTAJE	VARIACIÓN
	50 cm.	22,36 cm.	52,36 litros	78,54 litros	66,67%	
0 h	48 cm.	22,13 cm.	49,25 litros	73,87 litros	66,67%	-3,11 litros
1 h	46 cm.	21,90 cm.	46,20 litros	69,31 litros	66,67%	-3,05 litros
2 h	44 cm.	21,66 cm.	43,22 litros	64,84 litros	66,67%	-2,98 litros
3 h	42 cm.	21,41 cm.	40,31 litros	60,47 litros	66,67%	-2,91 litros
4 h	40 cm.	21,15 cm.	37,47 litros	56,20 litros	66,67%	-2,84 litros
5 h	38 cm.	20,88 cm.	34,69 litros	52,04 litros	66,67%	-2,77 litros
6 h	36 cm.	20,60 cm.	31,99 litros	47,98 litros	66,67%	-2,70 litros
7 h	34 cm.	20,31 cm.	29,36 litros	44,04 litros	66,67%	-2,63 litros
8 h	32 cm.	20,00 cm.	26,81 litros	40,21 litros	66,67%	-2,55 litros
9 h	30 cm.	19,68 cm.	24,33 litros	36,50 litros	66,67%	-2,47 litros
10 h	28 cm.	19,34 cm.	21,94 litros	32,91 litros	66,67%	-2,39 litros
11 h	26 cm.	18,99 cm.	19,63 litros	29,45 litros	66,67%	-2,31 litros
12 h	24 cm.	18,61 cm.	17,41 litros	26,12 litros	66,67%	-2,22 litros
13 h	22 cm.	18,21 cm.	15,28 litros	22,92 litros	66,67%	-2,13 litros
14 h	20 cm.	17,78 cm.	13,25 litros	19,87 litros	66,67%	-2,04 litros
15 h	18 cm.	17,32 cm.	11,31 litros	16,96 litros	66,67%	-1,94 litros
16 h	16 cm.	16,82 cm.	9,48 litros	14,22 litros	66,67%	-1,83 litros
17 h	14 cm.	16,27 cm.	7,76 litros	11,64 litros	66,67%	-1,72 litros
18 h	12 cm.	15,65 cm.	6,16 litros	9,23 litros	66,67%	-1,60 litros
19 h	10 cm.	14,95 cm.	4,68 litros	7,02 litros	66,67%	-1,47 litros
20 h	8 cm.	14,14 cm.	3,35 litros	5,03 litros	66,67%	-1,33 litros
21 h	6 cm.	13,16 cm.	2,18 litros	3,26 litros	66,67%	-1,17 litros
22 h	4 cm.	11,89 cm.	1,18 litros	1,78 litros	66,67%	-0,99 litros
23 h	2 cm.	10,00 cm.	0,42 litros	0,63 litros	66,67%	-0,77 litros
24 h	0 cm.	0,00 cm.	0,00 litros	0,00 litros		-0,42 litros
		A	0,0002			

10.4. Com $24=k(48-0)$, es té $k=0,5$ i $t=0,5(48-H)$.

10.5. a) Si $H=A \cdot R^4$ llavors $R = \sqrt[4]{\frac{H}{A}}$

b) Aplicant el càlcul integral per al càlcul de volums de revolució:

$$V(H) = \pi \int_0^H R^2 \cdot dH = \frac{\pi}{\sqrt{A}} \int_0^H \sqrt{H} \cdot dH = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}} \sqrt{H}^3$$



SOLUCIONS

APÈNDIX

Demostració de la fórmula $t = k(H_0 - H)$:

El cabal $Q = -\frac{dV}{dt} = -\frac{dV}{dH} \cdot \frac{dH}{dt} = -\frac{\pi}{\sqrt{A}} \sqrt{H} \frac{dH}{dt}$ sent $V(H) = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}} \sqrt{H}^3$. Pel teorema de Torricelli, la velocitat d'eixida de l'aigua depèn de l'altura de la mateixa en el recipient d'acord amb la fórmula $v = \sqrt{2gH}$. Per tant el cabal dependrà de la secció de l'orifici d'eixida (S) i de la velocitat (v):

$$Q = S\sqrt{2gH} = -\frac{\pi}{\sqrt{A}} \sqrt{H} \frac{dH}{dt}$$

Separant variables: $dt = -\frac{\pi}{S\sqrt{2gA}} dH = -CdH$

Integrant: $\int_0^t dt = -C \int_{H_0}^H dH$ es té $t = C(H_0 - H)$ que indica que la velocitat de descens del nivell de l'aigua és constant.

