

# EGIPTE

FITXES DE TREBALL. ÍNDEX DE CONTINGUTS		
ACTIVITAT	BLOC	CONTINGUTS
1. Repartint pans	-Aritmètica i àlgebra	-Nombres racionals. Operacions
2. Repartiments proporcionals	-Aritmètica i àlgebra	-Números racionals. Operacions
3. L'ombra de la piràmide	-Geometria	-Figures planes i cossos elementals
4. Més altures	-Geometria	-Figures planes i cossos elementals
5. De piràmides i volums	-Geometria	-Àrees i volums
6. Piràmides truncades	-Geometria	-Àrees i volums
7. Coneix el faraó el nombre $\pi$ ?	-Geometria	-Àrees i volums
8. Volum d'un graner	-Geometria	-Àrees i volums
9. Equacions molt antigues	-Aritmètica i àlgebra	-Equacions de primer grau
10. Una de fraccions	-Aritmètica i àlgebra	-Números racionals. Operacions

2<sup>o</sup> Cicle de l'ESO. Matemàtiques, Egipte



# 2<sup>o</sup> Cicle de l'ESO. Matemàtiques, **Egipte**



# 1. REPARTINT PANS

Els egipcis dominaven les operacions aritmètiques usals, com la suma, la resta, la multiplicació i la divisió. Per a les dos primeres, simplement afegien o sotreien símbols. Per a les segones, disposaven de mètodes propis, molt diferents dels actuals, però igualment útils per a les seues necessitats. Et recomanem localitzar, en el capítol dedicat al primer cicle, este assumpte, i que aprengues com es manejaven amb el càlcul aritmètic.

El producte i multiplicació resultaven senzills. Però no la divisió no sencera (no exacta), encara que el procés és semblant, excepte en el moment en què s'esgoten les duplicacions, en el que es procedix amb divisions. Per exemple, calcular  $21 : 6$ , consistix a esbrinar quin nombre multiplicat per 6 dóna 21, és a dir,  $? \times 6 = 21$

No duplicamos porque el doble de 12 superaría a 21.

1	6
2	12

No obstant, amb la suma de les quantitats de la segona columna no s'obté 21 perquè  $21 - 12 = 9$  i  $9 - 6 = 3$ , hem de continuar, però ara amb divisions ( $1/2, 1/4...$ ):

Ahora utilizamos fracciones de 6.

1	6
2	12
1/2	3

Ara sí que és possible,  $21 - 12 = 9$  i  $9 - 6 = 3$  junt amb  $3 - 3 = 0$ , indiquen que  $21 = 12 + 6 + 3$ , per tant, la solució és  $2 + 1 + 1/2 = 3 + 1/2 = 3,5$ , és a dir,  $21 : 6 = 3,5$ .

Si traslladem estos conceptes a la vida quotidiana dels egipcis, veiem que són necessaris per a procedir al repartiment d'aliments, per exemple, fogasses de pa. Amb el resultat anterior, el procés per a repartir 21 fogasses entre 6 egipcis seria donar 2 fogasses a cada un (queden  $21 - 12 = 9$ ), de les nou restants donar una a cada un (queden  $9 - 6 = 3$ ) i amb els 3 pans que queden partir-los en dos trossos i donar un tros a cada u.

- 1.1. Un problema freqüent ha sigut la distribució de les racions entre els membres d'una comunitat. Sabries dividir equitativament, per mitjà del mètode de les duplicacions successives, 710 fogasses de pa entre 40 persones?



## 2. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

No obstant, la majoria dels repartiments en l'antic Egipte eren desiguals. No percebia el mateix un sacerdot, un escriva o un esclau. Així el problema 65 del papir de Rhind planteja una qüestió molt pareguda a la següent:

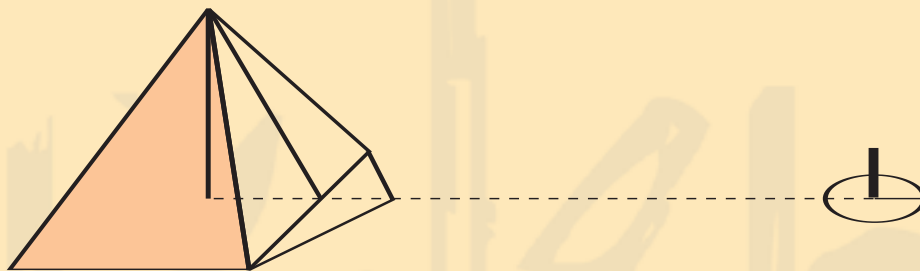
- 2.1. *Exemple de dividir 100 pans entre 10 hòmens: un barquer, un guardià, tenint cada un el doble que els huit mariners ordinaris. Així, si huit hòmens reben la seua ració i dos reben el doble, suposarem que hi ha 12 hòmens entre els que repartir els 100 pans.*
- 2.2. Repartix, usant el mètode de les duplicacions successives, 320 pans entre 20 hòmens: un capatàs, un guardià, un sacerdot, un escriva, tenint cada un el doble que els 16 treballadors restants.



### 3. L'OMBRA DE LA PIRÀMIDE

Sabien mesurar l'altura de les piràmides? Els arquitectes egipcis feien les seues operacions i construccions geomètriques sobre l'arena del desert, per mitjà de cordes i estagues. El seu procediment per a mesurar l'altura d'una piràmide consistia a esperar que el sol estiguera a  $45^\circ$  d'altura sobre l'horitzó.

En el procés es clava una estaca verticalment en el centre d'un cercle, el radi del qual és igual a la longitud de l'estaca. En l'instant en què l'ombra de l'estaca toca el cantell del cercle, es mesura la longitud de l'ombra de la piràmide i se li afegia la mitat de la longitud de la base. Eixa és l'altura de la piràmide.



Este mètode presentava l'inconvenient que calia esperar a les dates adequades. El filòsof Thales no era egipci, però va idear un procediment per a mesurar l'altura de la gran piràmide de Keops sense tindre que esperar a les dates en què el sol al migdia està a  $45^\circ$ . El seu mètode es basava en la semblança de triangles. Va plantar una estaca vertical en el sòl, en l'extrem de l'ombra de la piràmide. Llavors, l'estaca, la seua ombra i els rajos del sol formen un triangle rectangle semblant al què formen l'altura de la piràmide, els rajos del sol i l'ombra de la piràmide, més la mitat de la longitud de la base de la piràmide.

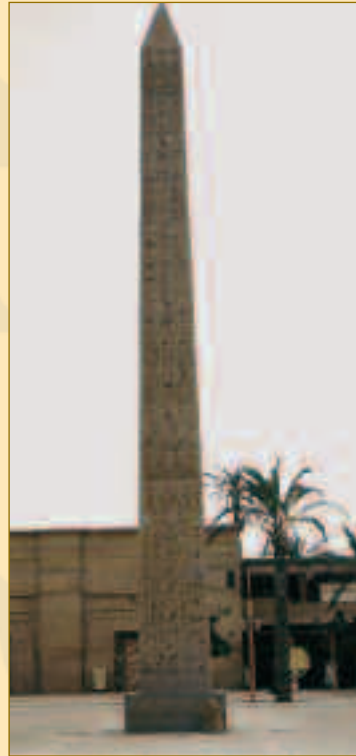
- 3.1. Sabem que la gran piràmide de Keops mesura 230 m. de costat i que si clavem una estaca d'1 m., quan la seua ombra mesura 1,5 m., l'ombra de la piràmide mesura 104 m. Realitza un dibuix aproximat de la piràmide i calcula la seua altura utilitzant el mètode ideat per Thales.



## 4. MÉS ALTURES

Pots utilitzar este mètode, basat en la semblança de triangles, per a calcular l'altura de qualsevol objecte. Únicament necessitaràs una cinta mètrica i un poc d'habilitat en el càlcul numèric. Tu mateix pots formar amb la teua altura el triangle que es forma amb l'estaca. Com a exemple de l'eficàcia del mètode pots provar amb qualsevol objecte de què conegues la seua altura i que et servisca per a comprovar si ho domines.

Un exercici molt senzill consistix a esbrinar l'altura de l'Obelisc o Agulla de Cleòpatra, situat en l'entrada de Terra Mítica, en la plaça del mateix nom. L'obelisc tenia com a objecte travessar els núvols i dispersar les forces negatives que oculten el Déu Sol. L'Agulla de Cleòpatra es va construir en 1468 a.C. i, actualment, es troben (són dos realment) a Londres i en Central Park dels Estats Units.



- 4.1.** Utilitza una cinta mètrica per a obtindre la longitud de la teua ombra i la teua altura la de l'Agulla de Cleòpatra i per mitjà del mètode ideat per Thales calcula l'ombra d'este obelisc, sabent que l'altura del mateix és de 20,87 metres. (Suposarem que la diferència de latitud i longitud no influïxen).



## 5. DE PIRÀMIDES I VOLUMS

Perquè et faces una idea de l'enorme construcció que és la piràmide de Keops, t'anem a demanar que realitzes uns senzills càlculs. Has de saber, prèviament, que la unitat bàsica de superfície en l'antic Egipte era el setat, que corresponia a l'àrea d'un quadrat de 100 colzes de costat (un colze era una unitat de longitud que equival a 0,523 m.). Per tant:

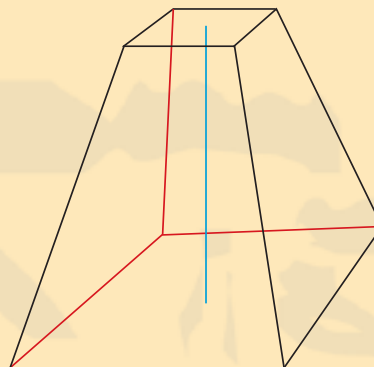
- 5.1. Calcula en setats i en  $m^2$  (per a comparar), les àrees laterals i total de la gran piràmide de Keops, que mesura 147 metres d'altura i la base de la qual és un quadrat de 230 metres de costat.
- 5.2. Calcula en *jars*, antiga unitat egípcia de volum que equival a 96 litres, i en  $m^3$  el volum de la piràmide. Quants camions cisterna de 10.000 litres de capacitat es necessitarien per a omplir-la?





## 6. PIRÀMIDES TRUNCADES

La major part de la matemàtica egípcia ens ha arribat a nosaltres a través de dos escrits fonamentals: els papirs de Rhind i de Moscou, per tant, et demanem que sigues un bon escriptor i que lliges amb atenció l'enunciat d'un altre problema, en concret, el problema número 14 del paper de Moscou, considerat com l'autèntica joia de la matemàtica egípcia:



*Exemple de com calcular una piràmide truncada; si se vos diu, una piràmide truncada d'altura 6 i bases 4 i 2, heu de prendre el quadrat de 4 que és 16, després doblar quatre per a obtenir 8, prendre el quadrat de 2 que és 4, sumar 16, 4 i 8 per a obtenir 28; després calcular  $\frac{1}{3}$  de 6 que és 2; multiplica 28 per 2 que dona 56; veieu, és 56.*

- 6.1.** Sé un bon aprenent d'escriptor i usa el procediment anterior per a calcular el volum d'una piràmide truncada de 12 d'altura, per 8 de base, per 5 de dalt.





## 7. CONEIX EL FARAÓ EL NOMBRE $\pi$ ?

Hem pogut comprovar que els egipcis eren grans geòmetres, com alçar, si no, les seues piràmides! No obstant, desconeixien les fórmules geomètriques que usem hui en dia per a obtindre fàcilment àrees i volums. Els seus camps de cultiu tenien formes que representaven no sols rectangles sinó, en general, quadrilàters de formes irregulars. No està documentat que cultivaren camps en forma diferent de la rectangular, però pareix probable que necessitaren el càlcul de superfícies circulars per a construir graners cilíndrics. Potser, per això, sabien obtindre, de manera aproximada, l'àrea d'un cercle.



Com mostra d'això, et mostrem el problema 50 del papir Rhind l'enunciat del qual és: *Calcula l'àrea d'un camp circular el diàmetre del qual és 9 khet* (el khet és una mesura de longitud equivalent a 52 m. aproximadament). El procediment desenvolupat en el propi papir és així: *Resta al diàmetre (que és 9) 1/9 del mateix, que és 1. La diferència és 8. Ara multiplica 8 vegades 8, que dona 64. Esta és l'àrea del cercle.*

No obtenien el valor exacte de l'àrea, sinó que calculaven una aproximació, relacionada amb un octògon sobre el qual situaven el cercle.

- 7.1. Utilitza esta aproximació per a calcular l'àrea de la base d'un graner cilíndric de 2 m. de radi.
- 7.2. Compara el resultat anterior amb el que s'obté per mitjà de la fórmula actual, calculant l'error relatiu que es comet amb el mètode egipci.



## 8. VOLUM D'UN GRANER

- 8.1. Si es donara com a vàlida l'aproximació del càlcul egipci, quin valor hauríem d'assignar a la constant  $\pi$ ?

De fet, el problema 41 del papir Rhind mostra com obtindre el volum d'un graner d'este tipus: Exemple de fer un graner redó (cilíndric) de (diàmetre) 9 (colzes) i (altura) 10 (colzes). És clar, que si el valor per a l'àrea del cercle és aproximat, també serà aproximat el volum dels graners construïts amb base circular. L'escriba indica les operacions següents:

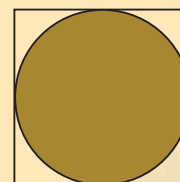
- Es calcula  $1/9$  del diàmetre,
- se li resta al propi diàmetre,
- tal resta es multiplica per si mateix,
- es multiplica per 10 (altura).

- 8.2. Compara el valor obtingut anteriorment amb el que obtindries si apliques la fórmula per al volum d'un cilindre.

Encara anaven més enllà, a l'afirmar que la relació entre l'àrea d'un cercle i la longitud de la seua circumferència és la mateixa que la relació existent entre l'àrea i el perímetre del quadrat circumscribit a tal cercle, és a dir,

$$A_{\text{CERCLE}} / L_{\text{CIRCUMFERENCIA}} = A_{\text{QUADRAT CIRCUMSCRIT}} / P_{\text{QUADRAT CIRCUMSCRIT}}$$

- 8.3. Posa a prova els geòmetres egipcis i comprova la dita relació per a un cercle de radi 1 metre i el seu quadrat circumscribit.



- 8.4. Comprova la validesa general d'esta afirmació a partir d'un cercle qualsevol de radi "r" (necessites expressar de forma general l'àrea i el perímetre del quadrat circumscribit al cercle de radi r i comparar el resultat del seu quocient amb el de l'àrea de tal cercle de radi r i la longitud de la seua circumferència).



## 9. EQUACIONS MOLT ANTIGUES

Has pogut comprovar que la Geometria era sens dubte la part de les matemàtiques que més van utilitzar els egipcis, però, no sols tenien coneixements de Geometria, necessaris per a construir les impressionants piràmides, també podien resoldre problemes que, en l'actualitat, resollem per mitjà d'una equació de primer grau i que ells resolien com podien. Ara et proposem que amb l'única ajuda dels teus coneixements d'Àlgebra intentes resoldre el problema 24 del papir de Rhind, en el que es llig: *Calcula el valor de l'aha (muntó) si l'aha i un sèptim de l'aha són iguals a 19.*

- 9.1. Expressa per mitjà d'una equació de primer grau senzilla l'enunciat del problema i resol-la.
- 9.2. Resol el problema 26: *Una quantitat i el seu quart es convertixen en 15, calcula la quantitat.*



## 10. UNA DE FRACCIONS

En les activitats per al primer cicle hem destacat que utilitzaven fraccions, sobretot, aquelles amb numerador 1 i el denominador de les quals és 2, 3, 4,..., i les fraccions  $\frac{2}{3}$  i  $\frac{3}{4}$ . Nosaltres, normalment escrivim un nombre no sencer en forma decimal, 3,75, o, per mitjà d'una fracció,  $\frac{15}{4}$ . No obstant, els egipcis utilitzaven una curiosa forma de treballar amb fraccions. Estes sempre tenien de numerador l'1 i de denominador qualsevol nombre enter major d'1. No tenien notació per a escriure fraccions que no foren del tipus anterior, ni tan sols hi ha mostres escrites d'elles. Per exemple, la fracció  $\frac{3}{4}$  era, per a ells, la suma  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , o, la fracció  $\frac{6}{7}$  era  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$ . Però no consideraven descomposicions de la forma,  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ , en les que es repetia el mateix sumand.

No sabem exactament el mètode que usaven per a aconseguir estes descomposicions, perquè no són úniques. En tots els escrits estudiats la descomposició que s'ha trobat és la més senzilla possible i no és un problema trivial trobar-la. Un nombre de matemàtics famosos s'ha interessat per este problema i s'ha trobat diferents algorismes per a realitzar la descomposició.

**10.1.** Com hem comentat anteriorment, la descomposició d'una fracció en suma de "fraccions egípcies" no és única, podries escriure n tal que  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n}$ ? I tal que  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{n}$ ?

**10.2.** Resol el problema 13 del papir de Rhind: Multiplica  $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$  per  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ .

