

SOLUCIONS

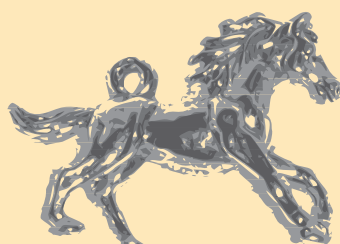
1. ELS ÍBERS

1.1.

13.2.37.5.2.73.2	FALCATA
37.2.43.5.11.2	LANCEA
73.67.2.17.79.37.2	TRÁGULA
71.2.17.79.43	SAGUN
37.53.67.23.17.2	LÓRIGA
17.2.11.71.79.41	GAUESUM

- 1.2. a) $p = 2 \cdot \pi \cdot 30 = 18,84$ cm. y $A = \pi \cdot 15^2 = 70,65$ cm².
 b) Un cercle té de superfície $42,39/6 = 7,065$ cm².
 Com $7,065 = \pi \cdot r^2$, el radi val 1,5 cm. i per tant el diàmetre 3 cm.
 c) L'amplària de cada corona és de 4 cm. les àrees són:
 $A_1 = \pi(15^2 - 11^2) = 326,56$ cm² y $A_2 = \pi(11^2 - 7^2) = 226,08$ cm²
 d) Per a l'escut romà $2x \cdot x = 70,65$ i per tant $x = 5,94$ cm.
 L'escut romà té un perímetre de 35,66 cm. quasi el doble a pesar de tindre ambdós figures la mateixa àrea.
- 1.3. a) El camí més curt de 1.284 km. pot ser M-A-B-E-A-M o M-A-E-B-A-M.
 b) El temps emprat és $822/100 = 8,22$ h. de viatge més 1,5 h. descarregant les "dames" són 9,72 h. = 9 h. 43' 12".
- 1.4. Has de multiplicar la distància en línia recta entre cada dos ciutats i expressar-la en km.
 a) En una escala 1:300000 s'obté:

MADRID-ALBACETE	75 mm.	225 km.
ALBACETE-ELX	48 mm.	144 km.
ELX-BAZA	62 mm.	186 km.
BAZA-ALBACETE	65 mm.	195 km.
BAZA-MADRID	113 mm.	339 km.
ELX-MADRID	120 mm.	360 km.



SOLUCIONS

- b) Els recorreguts realitzats per carretera queden reduïts a 975 km. De totes maneres el trajecte M-A-E-B-M és només de 894 km. I inclús el trajecte M-A-B-E-M de 966 km. també és un poc inferior.
- c) El temps emprat en l'avioneta és $994/300 = 2,98$ h. de viatge més les 3 h. en cada destí són 5,98 h. = 5 h. 58' 48".

2. MATEMÀTIQUES RECREATIVES EN EL SEGLE XVI

2.1. Pérez de Moya utilitza els símbols següents:

co.	p.	n.	ig.
cosa (x)	més (+)	Número unitat Sense lectura	Igual (=)

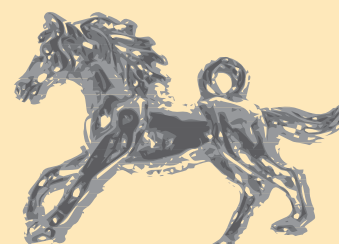
Amb la notació actual seria: $3x+4(x+5)=69$, $7x+20=69$ que és l'equació que apareix en l'enunciat. Per tant la solució és 7.

2.2. En el cas de 3, 5 i 8 hi ha dues solucions:

8	8	3	3	6	6	1	1	4	
5	0	5	2	2	0	5	4	4	
3	0	0	3	0	2	2	3	0	
8	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3	0	3	0	3	1	1	0	3	0

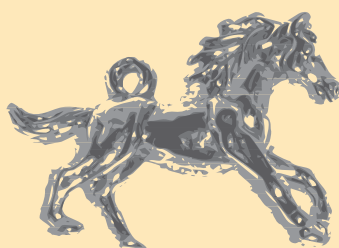
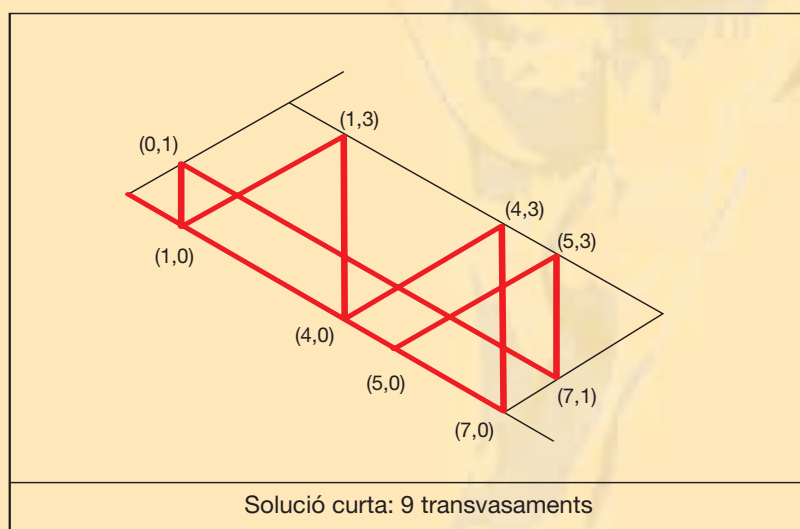
Hi ha un procediment gràfic per a resoldre problemes d'este tipus que, normalment, porta a dos solucions (una llarga i una altra curta).

Anem a explicar-ho per al cas 10, 7, 3. A la mesura la capacitat de la qual és set arroves l'anomenarem X i a la mesura la capacitat de la qual és de tres arroves Y. Tracem dos eixos de coordenades que formen un angle de 60 graus; sobre l'eix d'abscisses X portarem 7 divisions i sobre el d'orde-

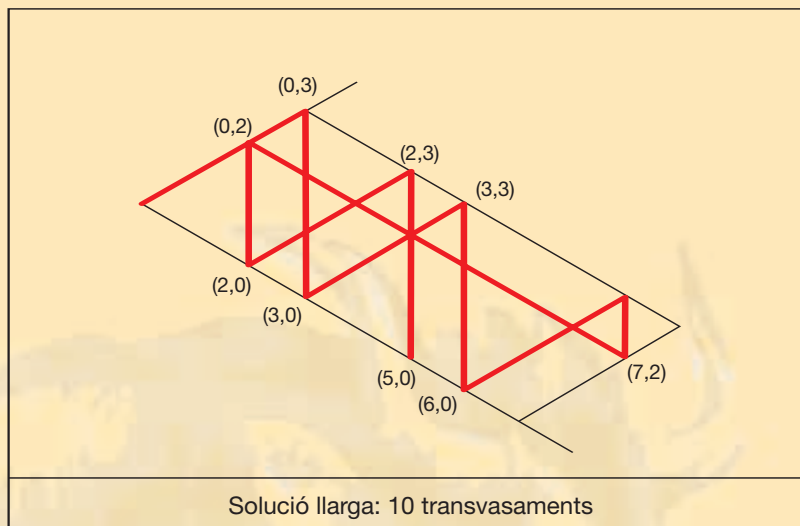


SOLUCIONS

nades Y, 3. En el pla així definit podem representar l'estat de les dues mesures X, Y, per mitjà d'un punt les coordenades del qual siguen els respectius continguts. Cada transvasament estarà representat per un vector l'origen i extrem del qual estaran determinats pels continguts d'ambdós mesures en els seus estats inicial i final, és a dir, abans i després de cada transvasament. Els successius transvasaments que resolen el problema formaran una cadena de vectors que unixen els punts següents per este orde: (0,0), (7,0), (4,3), (4,0), (1,3), (1,0), (0,1), (7,1), (5,3) i (5,0). Observa que els extrems dels vectors queden sempre en el perímetre del paral·lelogram definit pels vèrtexs de coordenades (0,0), (3,0), (7,3) i (0,7). El recorregut dels vectors s'inicia en l'origen de coordenades, i es comporta igual que un raig de llum que s'anara reflectint en els costats del paral·lelogram com si estos fossen espills. Veiem, per tant, que el problema es resol amb 9 transvasaments. La segona solució (que requerix deu transvasaments) l'obtindríem per mitjà del recorregut (0,0), (0,3),... Els números corresponents a la quantitat a repartir i a les capacitats han de ser primers entre si, en cas contrari, dividint pels seus factors comuns, el problema quedaria reduït a un altre anàleg. És evident que la quantitat a repartir ha de ser sempre parella. Sempre que la suma de les capacitats de les dues mesures siga igual a la quantitat a repartir, s'observa que el número necessari de transvasaments és igual al de la quantitat a repartir (solució llarga); la solució curta té un transvasament menys. Per exemple, amb els números 36, 19 i 17 necessitem 36 i 35 transvasaments.



SOLUCIONS



10	10	3	3	6	6	9	9	2	2	5	
7	0	7	4	4	1	1	0	7	5	5	
3	0	0	3	0	3	0	1	1	3	0	
10	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5	5
7	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5
3	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3	0

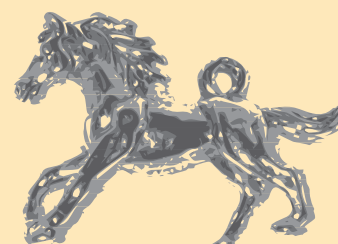
2.3. a)

9	9	5	5	1	1	0	9	6
4	0	4	0	4	0	1	1	4

b)

5/4	5/4	2/4
3/4	0	3/4

5/4	0	3/4	3/4	5/4
3/4	3/4	0	3/4	1/4



SOLUCIONS

2.4. a)

24	24	19	8	8	8	8	8	8
13	0	0	0	11	13	13	8	8
11	0	0	11	0	0	3	3	8
5	0	5	5	5	3	0	5	0

b) Sí, aconseguixen 3 litres d'orxata gratis:

9	9	5	3	3	3	3	3
5	0	0	0	2	5	3	3
4	0	4	4	4	1	1	3
2	0	0	2	0	0	2	0

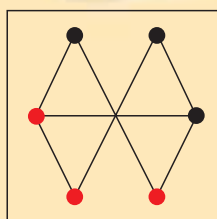
3. UN JOC MEDIEVAL: L'ALQUERQUE

3.1. quadrats: $16+4+1+4+1=26$

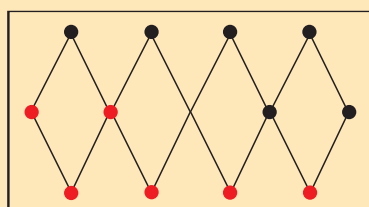
Triangles: $32+16+4+2=54$

3.2. Es pot organitzar un campionat entre els alumnes i alumnes de la classe.

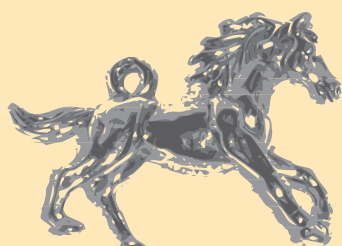
3.3. El tauler mínim seria el següent:



El que ix primer perd, per tant l'altre li "menja" la fitxa i a partir d'ací tota fitxa moguda pel primer se la "menja" el segon. El següent tauler seria:



Es tracta que l'alumne/a investigue i contrasti les seues conclusions amb altres companys/es.



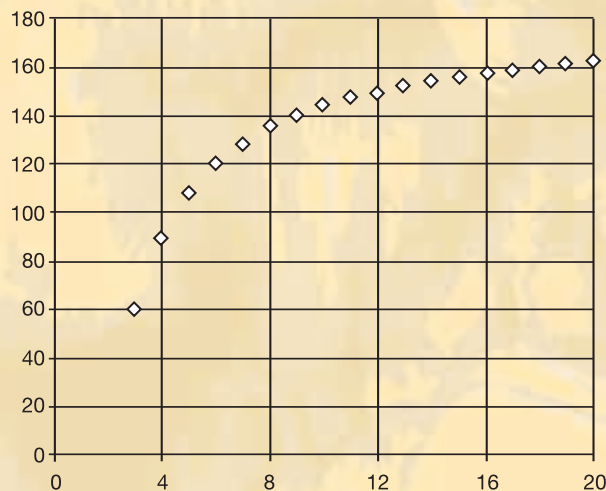
SOLUCIONS

4. PEDRO SÁNCHEZ CIRUELO: POLÍGONS ESTRELATS

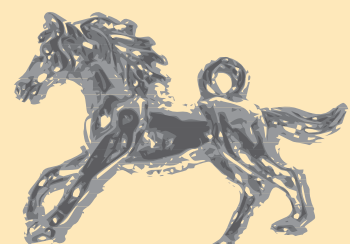
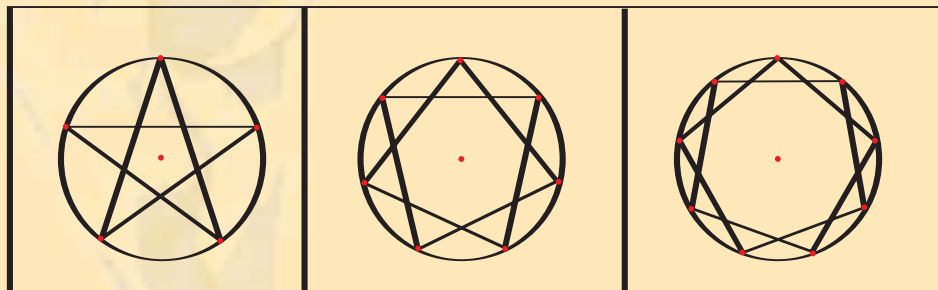
- 4.1. a) Els polígons són el pentàgon, hexàgon, heptàgon, octògon, eneàgon i decàgon. Els seus angles interiors valen 108° , 120° , $128,6^\circ$, 135° , 140° i 144° respectivament.

La fórmula és $180 - \frac{360}{n}$ i per tant per a un polígon de 12, 30 i 360 costats l'angle interior val $177,5^\circ$, 168° i 179° respectivament.

- 4.2. La gràfica és la següent:



- 4.3. a) Alguns dels possibles polígons estrelats són:



SOLUCIONS

S'obtenen polígons estrelats si n i k són primers entre si, per exemple els amunt representats: $\{5/2\}$, $\{7/2\}$ i $\{9/2\}$. Per exemple $\{9/3\}$ donaria un triangle equilàter igual al què s'obtindria amb $\{3/1\}$.

b) $\{11/6\}$ i $\{13/7\}$ donarien els mateixos polígons estrelats. Hauràs observat que $\{n/k\}$ i $\{n/(n-k)\}$ generen el mateix polígon.

4.4. a) En el cas de la figura $\{5/2\}$ l'angle $b=360^\circ/5=72^\circ$. Per tant $a=36^\circ$. Anàlogament per a $\{7/2\}$, $\{7/3\}$ i $\{9/5\}$ els angles són $25,7^\circ$, $25,7^\circ$ i 20° .

b) Per a l'hexàgon s'obté 120° . Per al polígon $\{7/4\}=\{7/3\}$ s'obté $-25,7^\circ$ o $25,7^\circ$. Per a $\{8/3\}$ és de 45° i per a $\{10/3\}$ és de 72° .

5. PEDRO NUNES: LA CONSTRUCCIÓ D'UN NÒNIUS

5.2. Perquè com el nònius mesura una unitat menys que la regla, cada unitat del nònius mesura 0,1 menys que la de la regla. Si coincidixen les ratlles al cap de tres unitats és perquè hem augmentat 0,3.

5.4. Si un costat mesura x , l'altre costat mesura $8-x$

$$\begin{aligned} 8x - x^2 &= 12 \\ \text{Area} &= x \cdot (8 - x) = 12; & x^2 - 8x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

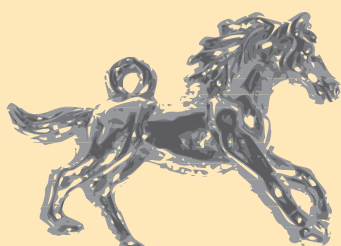
Resolent l'equació de segon grau obtenim que un costat mesura 6 i l'altre 2.

5.5. Si un costat mesura x i l'altre $x+1$:

a) L'equació és $x(x+1)=12$ que dona $x=3$ com a solució vàlida.

b) L'equació és $x^2+(x+1)^2=5^2$ que dona la mateixa solució.

Els costats mesuren un 3 i l'altre 4.



SOLUCIONS

6. L'EVOLUCIÓ DELS ESCACS

6.1. Per a calcular-ho hem de sumar $1+2+4+8+16+\dots$ així fins a 64 termes (les 64 caselles del tauler).

Són les 64 primeres potències de 2, començant en 2^0 .

Per a sumar-les més fàcilment podem fixar-nos en el següent:

$$1+2= 4-1 \quad (2^2-1)$$

$$1+2+4= 8-1 \quad (2^3-1)$$

$$1+2+4+8= 16-1 \quad (2^4-1)$$

$$\text{Després: } 1+2+4+8+16+32+64+128+\dots = 2^{64}-1 = \\ = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

6.2. Problema 1:

1.- Tc3 Rc3, 2.-Te3 #

Problema 2:

1.- Ac4, 2.-Rb1 Ta1, 3.-Ra1 b2, 4.-Rb1 Ca3#.

Este és el famós mate de Dil-Aram.

Problema 3:

1.- Cg7 Rf7, 2.-Tf1 Rg8 3.-Tf8 Rf8, 4.-C(g7)e6 Rg3, 5.-Tg2 Rf7, 6.-Tg7 Re8, 7.-Ce7 Rd8, 8.-C(c5)e6 Rc8, 9.-b7 Rd7, 10.-Af5#

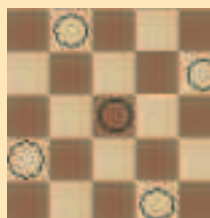
6.3. - En el tauler de 4x4 és prou col·locar dos reines per a amenaçar les 16 caselles.

- Es necessiten tres si el tauler és de 5x5.

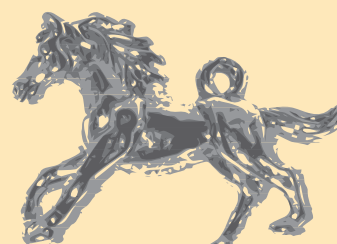
- Es poden col·locar 4 reines en el tauler de 4x4 de la forma següent:



-En el tauler de 5x5 hi ha dues formes possibles de col·locar les reines:



6.4. En el primer cas fan falta 8 moviments i en el segon són necessaris 16 moviments.



SOLUCIONS

7. MESURES AGRÀRIES ANTIGUES

7.1. a) 320 braces; b) 64,04 quarantens

7.2. 52.730 m²

7.3. a) Santiago; b) 1,77 vegades

7.4. 16.900 m²

7.5. 130 m. x 130 m.

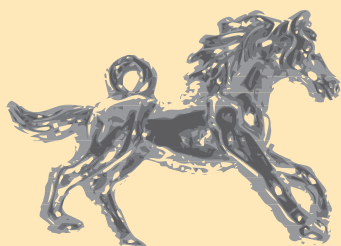
7.6. 2.646 tarongers en total; 130 tarongers per fanecada; 1.566 tarongers per hectàrea.

7.7. 118,3 kg. d'urea; 42,25 kg.. de fosfat amònic 169 kg. de nitrat fosfòric.

7.8. 96,57 tones de fem.

7.9. 27%

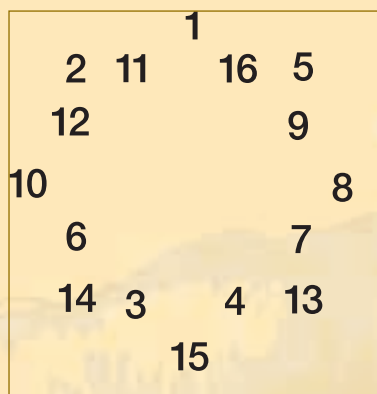
7.10. 16,25 quarantens; 15,6%



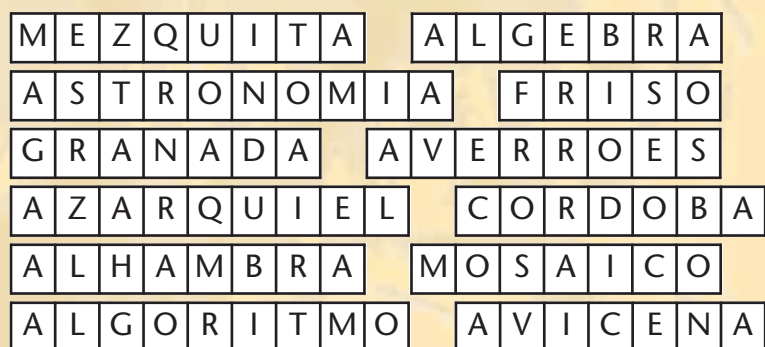
SOLUCIONS

8. PASSATEMPS I AL-ANDALUS

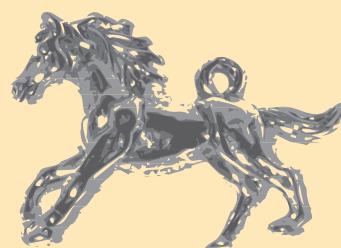
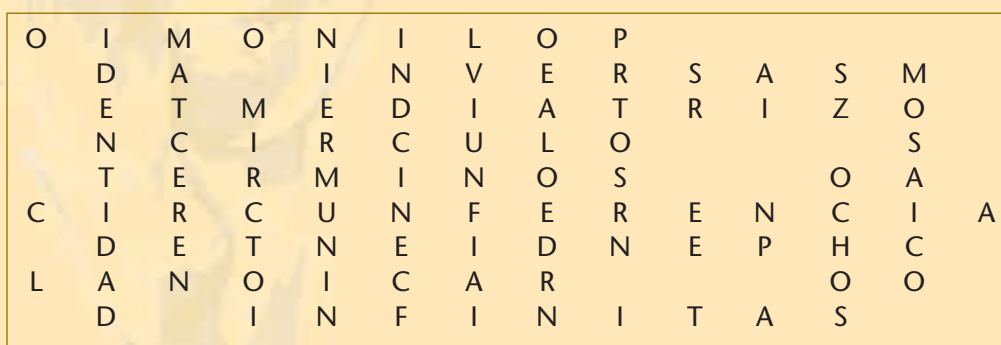
8.1.



8.2.



8.3.



SOLUCIONS

9. LA BARRACA VALENCIANA

- 9.1. a) L'únic múltiple de 9 i 11 que siga parell i menor que 200 és 198.
b) Coincidixen cada 120 dies que és el MCD(8,12,15).

- 9.2. a) $1.200 \cdot 0,05 = 60$ euros. b) $60 \cdot 1,02^5 = 66,25$ euros.

- 9.3. a) $9,5 \cdot 3/5 = 5,7$ m.
b) Dimensions de la finestra gran: 132 cm. x 60 cm. i dimensions de la finestra xicoteta: 88 cm. x 40 cm.
c) Les superfícies de la porta, finestra gran i finestra xicoteta són 17.820 cm^2 , 7.920 cm^2 i 3.520 cm^2 respectivament. Si dividim les àrees dos a dos observem que estan en una relació $2,25 = 4/9$. Per tant la raó de semblança de les àrees és el quadrat de la de les longituds.

- 9.4. a) $A = 5,7 \cdot 2,5 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2,5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5,7 \cdot 2,5 \cdot 2 + 3,79 \cdot 9,5 \cdot 2 = 162,26 \text{ m}^2$

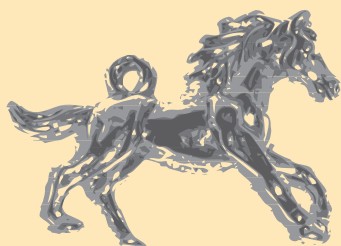
$$V = 5,7 \cdot 9,5 \cdot 2,5 + \frac{1}{2} \cdot 5,7 \cdot 2,5 \cdot 9,5 = 203,06 \text{ m}^3$$

- b) La superfície a emblanquinar és: $90,25 - 13,222 = 77,028 \text{ m}^2$. Per tant necessita 8 pots.
c) Com el MCD(6;15)=3 costarà 24 euros.

10. LA CLEPSIDRA: RELLOTGE D'AIGUA

- 10.1. La fórmula del volum del cilindre és $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$.

- 10.2. Com $1.500 = \pi \cdot 5^2 \cdot H$ llavors $H = 19,09$ cm.



- 10.3. Com $1.500 = \pi \cdot R^2 \cdot 9,55$ llavors $R = 7,07$ cm.
Com $1.500 = \pi \cdot R^2 \cdot 38,18$ llavors $R = 3,53$ cm.

En conseqüència ni es fa el doble (10 cm.) ni es redueix a la mitat (2,5 cm.); varia prou menys pel fet que no és proporcional (R^2).
Si l'altura és igual al diàmetre, es té que:

$$1.500 = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot (2R) = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \text{ i per tant } R = 6,20 \text{ cm.}$$

- 10.4. Com $\frac{1.500}{125} = 12$, resulta que cada 12 minuts es buida. Caldrà engrandir l'orifici d'eixida perquè isca 4 vegades més d'aigua per minut, és a dir, 500 cm³.
- 10.5. Cal fer 12 marques separades 1,59 cm. ja que l'altura és de 19,09 cm. En el segon cas seran cada 6,36 cm.
- 10.6. Dins de la simplicitat del mecanisme s'ha d'aconseguir que les marques estiguen aproximadament espaiades i en el cas d'anotar cada minut hauran de coincidir estes marques de manera alterna amb les marques anteriors. En la mesura que açò ocórrega, la "clepsidra" serà més precisa en el mesurament del temps.

