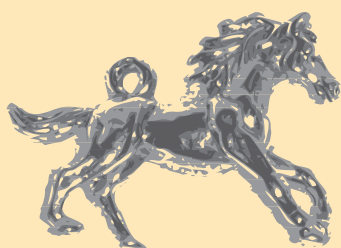


SOLUCIONES

1. JUAN MARTÍNEZ SILÍCEO: REPARTOS

- 1.1. Escribanse todos los números formulados en el testamento, es decir, 3 del hijo, 2 de la hija, 2 de la madre y 1 de la iglesia; súmense y tendremos 8, que es el divisor; el número de escudos, 2.000, es el multiplicador por el que se multiplica cada una de las partes; el producto se divide por 8; y el cociente dará la solución. Esta será: 750 escudos para el hijo, 500 para la hija, 500 para la mujer y 250 para la iglesia. De igual forma se operará si la mujer da a luz dos hijos o dos hijas o dos hijos y una hija.
- 1.2. Se debe coger cierto número para el tercero, por ejemplo el 2, y como el segundo debe recibir el triple del tercero, recibirá 6 que es el triple de 2; y el primero recibirá 12. Estos tres números, que son los multiplicadores, suman 20. Ahora se multiplica el dividendo, es decir, 1.000 francos, por cada uno de aquellos números y el resultado se divide por el divisor; el cociente es la solución. Hechos esto, el primero tendrá 600, el segundo 300 y el tercero 100.
- 1.3. Al primer hijo le correspondería $\frac{12}{25}$ del total. Al segundo hijo le correspondería $\frac{6}{25}$ del total. Al tercer hijo le correspondería $\frac{4}{25}$ del total. Al cuarto hijo le correspondería $\frac{3}{25}$ del total.
- 1.4. Reparto proporcional: $3 + 6 + 21 = 30$ Pedro: $\frac{3}{30} \cdot 18 = 18$,
Marta: $\frac{21}{30} \cdot 18 = 112,6$ y Juan: $\frac{6}{30} \cdot 18 = 3,6$.
- 1.5. Regla Igualitaria: Total rosquillas = 18; Niños = 3; $\frac{18}{3} = 6$ rosquillas le corresponden a cada uno.
- 1.6. $\frac{E}{n} = \frac{90}{3} = 30$; $r_1 = 20$, $r_2 = 25$; $r_3 = 100$; $\min(r_1, 30)$ $\min(r_2, 30)$ $\min(r_3, 30)$; 20; 25; 30. Como 20 y 25 son menores que la cantidad que les correspondería de 30, los restamos de la cantidad a repartir: $90 - 20 - 25 = 45$. Luego a Pedro le corresponde 20, a Juan 25 y a Marta 45.



SOLUCIONES

1.7. Hallamos primero la constante de proporcionalidad inversa:

$$\frac{k}{10} + \frac{k}{15} + \frac{k}{30} = 300; \frac{3k + 2k + k}{30} = 300; 6k = 9.000; k = \frac{9.000}{6} = 1.500$$

A Pedro le corresponden $\frac{1.500}{10} = 150$ dátiles

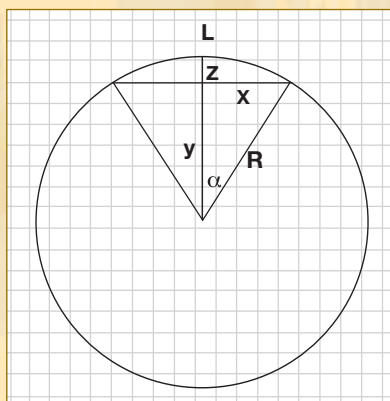
A Juan $\frac{1.500}{15} = 100$ dátiles

y a Marta $\frac{1.500}{30} = 50$ dátiles

2. LA GEOMETRÍA: SAVASORDA

2.1. $x^2 - 4x = 21$. Resolviendo se obtiene $x = 7$ y el área es 49.

2.2. Sea L un arco de circunferencia de radio R:

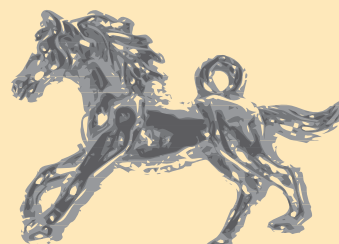


Si la cuerda mide 6, entonces $x=3$ y como el radio mide 5,25 se tiene

$\text{sen} \alpha = \frac{3}{5,25} = 0,57$. Por tanto $\alpha = 34,85^\circ$. Mediante una regla de tres:

$$L = \frac{2\pi R \cdot 2\alpha}{360} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5,25 \cdot 69,70}{360} = 6,39$$

2.3. Se obtiene $2\alpha = \frac{360 \cdot 5,5}{2 \cdot \pi \cdot 16,5} = 19,10^\circ$. Por tanto $\alpha = 9,55^\circ$. Como $x = R \cdot \text{sen} \alpha = 16,5 \cdot \text{sen}(9,55^\circ) = 2,7375$, el segmento mide 5,475.

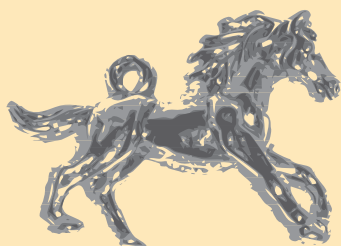


SOLUCIONES

- 2.4. En este caso $x=4$, $y=R-2$ y $z=2$. Aplicando Pitágoras $(R-2)^2 + 4^2 = R^2$. Al resolver $R=5$ y por tanto el diámetro vale 10.
- 2.5. Se resuelve la ecuación $x^2+(x+2)^2=100$ que da la anchura $x=6$. La altura es 8 y el área 48.
- 2.6. Las semidiagonales que miden 8 y 6 son los catetos de un triángulo equilátero de hipotenusa el lado del rombo. Por tanto le lado mide $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

3. EL ÁLGEBRA: BEN EZRA

- 3.1. $\left(x + \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{3}x\right) = 30$. Y operando se obtiene $x=18$.
- 3.2. $\left(x + \frac{1}{3}x + 4\right) + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{3}x + 4\right) = 40$. Y operando se obtiene $x=21$.
- 3.3. $\frac{1}{2}(x + 4) + 5 + (x + 4) = \frac{3}{2}(x + 4) + 5$. La cantidad obtenida sufre un nuevo aumento: $\frac{3}{2}(x + 4) + 5 + \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(x + 4) + 5\right] = 70$.
Y operando se obtiene $x=30$.
- 3.4. Iniciemos el problema por el final: tiene 8 dracmas que entrega; al ser consecuencia de duplicar, antes tenía 4 dracmas; pero había dado 4 dracmas, luego tenía 8 dracmas; como había duplicado tenía 4 dracmas; pero había dado 2 dracmas, luego tenía 6 dracmas antes de doblar; por tanto inicialmente tenía 3 dracmas.
Mediante la ecuación: $2[2(x-2)-4]-8=0$ se obtiene el mismo resultado.
- 3.5. Siguiendo el mismo razonamiento "de atrás hacia a delante":
 $1 + 2 \rightarrow 6 + 2 \rightarrow 16 + 2 \rightarrow 36$. Tenía 36 manzanas.



SOLUCIONES

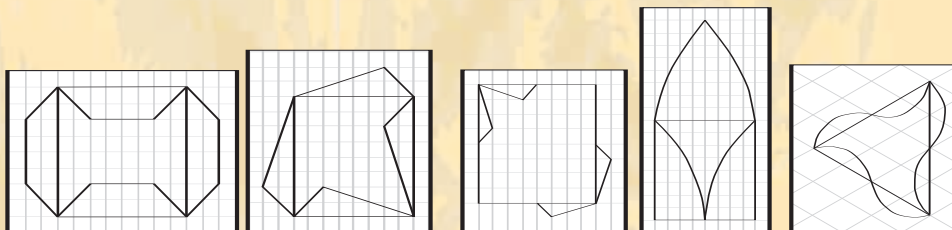
Mediante ecuaciones es bastante más complejo:

Pasos	Tiene	Entrega	Le quedan
1º guardia	x	$\frac{x}{2} + 2$	$\frac{x}{2} - 2$
2º guardia	$\frac{x}{2} - 2$	$\frac{x}{4} + 1$	$\frac{x}{4} - 3$
3º guardia	$\frac{x}{4} - 3$	$\frac{x}{8} + \frac{1}{2}$	$\frac{x}{8} - \frac{7}{2} = 1$

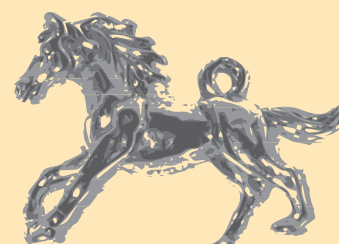
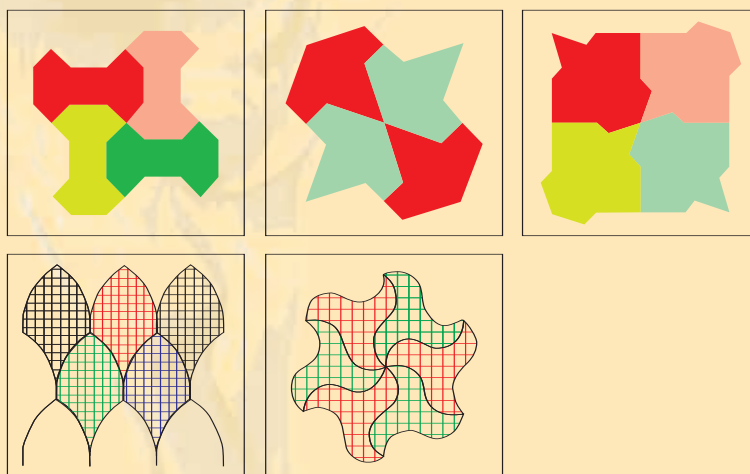
Y resolviendo la ecuación se obtienen 36 manzanas.

4. MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

4.1. Las figuras se han construido de la siguiente manera:



4.2. Los patrones para recubrir el plano con las teselas anteriores son:



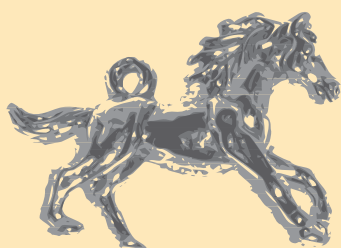
SOLUCIONES

Mediante un giro de 90° se consigue colocar un "hueso" verticalmente y luego mediante traslaciones cubrir el plano. Mediante un giro de 180° (equivalente a una simetría axial) se consiguen dos piezas; girando cada una de ellas 90° y con una traslación posterior se consigue el objetivo para "el avión". El mismo sistema se debe emplear para "el pez volador". En el caso de "la escama" basta con traslaciones. Finalmente, para "la pajarita" seis giros de 60° con centro en uno de sus vértices se consiguen 6 piezas iguales unidas y así sucesivamente.

- 4.3. perímetro del "hueso": $4 \cdot 4 + 4\sqrt{8} = 8(2 + \sqrt{2})$ cm.
 perímetro del "avión": $4\sqrt{8} + 4\sqrt{40} = 8(\sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm.
 perímetro del "pez volador": $4 \cdot 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{10} = 4(4 + \sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm.
- 4.4. El "hueso" tiene dos ejes de simetría perpendiculares, en cambio "el pez volador", "el avión" y "la escama" sólo tienen uno. En el caso de "la pajarita" tiene simetría radial de tercer orden.
- 4.5. Para crear "tus losetas" debes seguir estos consejos:
Cuadrado: El trozo que recortes de un lado, mediante un giro de 90° con centro en el extremo de ese lado, se lleva al lado contiguo. Haz lo mismo con los otros dos lados, tomando como centro de giro el vértice opuesto al anterior.
Triángulo: El trozo que recortes de la mitad de un lado mediante un giro de 180° con centro en el punto medio del lado, lo añades a la otra mitad. Haz lo mismo con los otros lados del triángulo.
- 4.6. a) La figura tiene una simetría central llamada de Leonardo: es un grupo cíclico C_8 , pues cada 45° la figura se superpone.
 b) Si llamamos "x" al lado de una estrella, el lado del cuadrado vale: $2x + \sqrt{2}x = 8$ y por tanto $x = 4(2 - \sqrt{2})$.

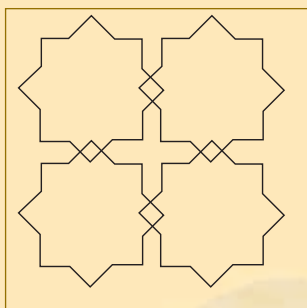
El perímetro de la estrella es $p = 16 \cdot 4(2 - \sqrt{2}) = 64(2 - \sqrt{2})$.

El área es la del cuadrado más 4 "esquinas" $A = 64 + 4 \frac{x^2}{2} = 262 - 128\sqrt{2}$.



SOLUCIONES

4.7. Por ejemplo:



5. UN JUEGO MEDIEVAL: EL MORRIS

5.1. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

5.2. Se trata de que el alumno/a investigue y contraste sus conclusiones con otros compañeros/as.

5.3.

Morris 9	Morris 5	Morris 7	Morris 12
32 cm.	24 cm.	26 cm.	$34 + 4\sqrt{2}$

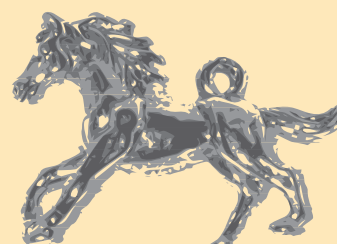
5.4. En el morris de 12 la araña recorrería $31,5 + 7\sqrt{2}$ cm.

6. EL NÚMERO CORDOBÉS

6.1. a) Los triángulos son isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia.

b) El ángulo BAC vale $\alpha + \beta$ por ser los triángulos isósceles.

c) El ángulo BOD vale 2α y el ángulo COD vale 2β por ángulos suplementarios. Como $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, entonces $\alpha + \beta = 90^\circ$ y el triángulo es rectángulo.



SOLUCIONES

6.2. a) es isósceles y $MN = \sqrt{2} R$.

b) Por simetría $OP' = NP' = MN/2$.

c) $\frac{NP}{PQ} = \frac{PP'}{NP}$, y por tanto $L^2 = PQ \cdot PP' = 2R(OP - OP') = 2R(R - \sqrt{2} R)$.

Luego $L = R(\sqrt{2} - \sqrt{2})$. Finalmente $\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} \approx 1,306562964$.

6.3. a) Si dibujamos un triángulo rectángulo de catetos la unidad, la hipotenusa vale $\sqrt{2}$. Con este radio dibujamos la circunferencia.

b) La bisectriz de la bisectriz del 1º cuadrante vale $22,5^\circ$.

c) La proyección del segmento OB es el segmento OC cuyo valor es el número cordobés:

$$C = \sqrt{2} \cos 22,5^\circ = 1,306562964...$$

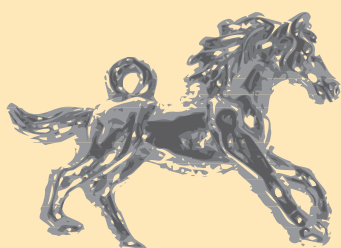
$$d) C = \sqrt{2} \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

(si se racionaliza esta expresión se obtiene la expresión anterior).

6.4. Como es una bicuadrada, $2z^2 - 4z + 1 = 0$ y al resolver se obtiene una de las raíces: $z = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4}$ y finalmente $x = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2}$. Si se racionaliza la expresión del número cordobés se llega a la misma expresión.

6.5. El perímetro está formado por $6/8$ de circunferencia y un segmento horizontal: $p = \frac{6}{8} \cdot 2\pi R + \sqrt{2}R$.

El área está formada por 6 sectores circulares y 2 triángulos isósceles equiláteros: $A = \frac{6}{8} \cdot \pi R^2 + \frac{R^2}{2}$.



SOLUCIONES

7. MONEDAS EN LA EDAD MEDIA

7.1. $11 \times 24 + 4 = 268$; Plata pura $= 12 \times 24 = 288$; $\frac{268}{288} = 93,05\%$ de plata pura.

7.3. La mitad de cada uno.

7.4. $5 \times 24 + 4 = 124$
 $7 \times 25 + 5 = 173$

$$\frac{124}{288} = 0,4305$$

$$\frac{173}{x} = 0,4305 \quad x = \frac{173}{0,4305} = 402 \text{ gramos}$$

7.5. $5 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 3 = 26x$

$$x = \frac{180}{26} = 6,9 \text{ dineros}$$

$0,9 \cdot 24 = 21$ granos
6 dineros y 21 granos

8. LA ARITMÉTICA: GASPAR NICOLÁS

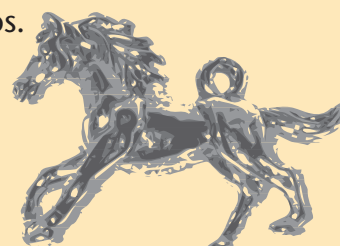
8.1. Suma los precios y tendrás 200 cruzados. El dinero que el mercader va a pagar son 350, $350/200 = 1 \cdot \frac{3}{4}$ por tanto tomará de cada especia un quintal y tres arrobas. Para comprobarlo, un quintal y tres arrobas del clavo que cuesta a 100 será 175, de la canela que cuesta a 60 son 105 y del jengibre que es a 40 son 70 cruzados, y sumando todo tenemos justamente los 350 cruzados.

8.2. En una hora vacían entre todos: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{57}{60}$ de la pila.

$$60:57 = 1,052 \text{ horas tardará en vaciarse completamente}$$

$$0,052 \times 60 = 3 \text{ minutos}$$

Tardará en vaciarse completamente 1 hora y 3 minutos.



SOLUCIONES

8.3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$; $6:11 = 0,54$ días.

Tardará aproximadamente en llegar a la isla medio día.

8.4. La respuesta coincide con la del problema anterior.

8.5. 4 flamencos en 1 día beberán $\frac{10}{3}$ cántaros.

5 españoles en 1 día beberán $\frac{20}{6}$ cántaros.

4 flamencos y 5 españoles beberán en 1 día $\frac{10}{3} + \frac{20}{6} = \frac{40}{6}$ cántaros.
60: $\frac{40}{6} = 9$ días tardarán en beberse el barril.

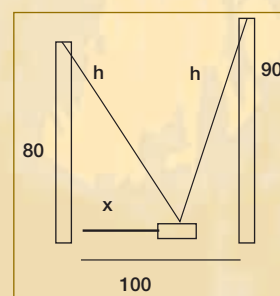
8.6. Aplicando Pitágoras:

$$h^2 = 80^2 + x^2$$

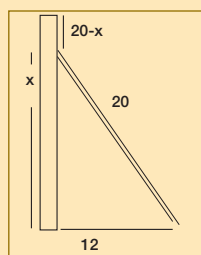
$$h^2 = 90^2 + (100 - x)^2$$

$$80^2 + x^2 = 90^2 + (100 - x)^2$$

Despejando obtenemos $x = 58,5$ metros de distancia a la torre A y a la torre B $100 - 58,5 = 41,5$ m.



8.7. Aplicando Pitágoras:

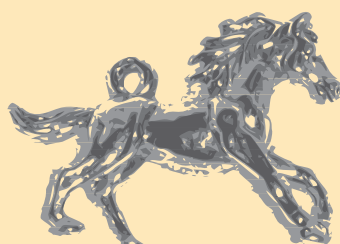


$$x^2 = 20^2 - 12^2$$

$$x^2 = 256$$

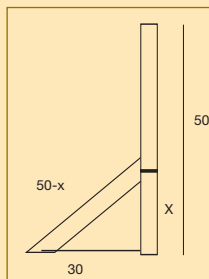
$$x = \sqrt{256} = 16$$

La altura que falta para llegar a la torre es: $20 - 16 = 4$



SOLUCIONES

8.8.



$$(50 - x)^2 = 30^2 + x^2$$

$$100x = 1.600$$

$$x = 16$$

- 8.9. Llamamos x a la distancia del pie de la escalera a la base de la primera torre. La distancia al pie de la segunda torre será de $(22-x)$. La altura de la escalera es constante e igual a h .

9. LA BARRACA VALENCIANA

- 9.1. Resolviendo la ecuación $x(x+3,9) = 4,59$ se obtienen las dimensiones de 5,1 m. y 9 m. respectivamente.

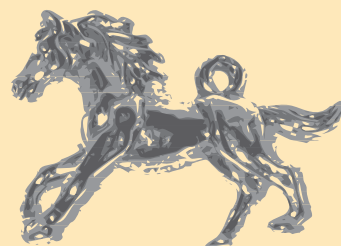
- 9.2. a) Será el MCD $(510, 900) = 30$ cm.
b) 510 baldosas se necesitarán pues $510/30=17$ y $900/30= 30$ y $17 \cdot 30 = 510$.

- 9.3. a) En una hora juntos hacen $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ de la obra.
Luego necesitarán 2 horas.

b) 6,5 horas tarda el aprendiz (si llamamos x al tiempo en horas que tarda el jefe, planteamos la ecuación: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$).

- 9.4. Paredes laterales: $y = 2,55$; $y = -2,55$.

Alerones del tejado: $\frac{x}{2,55} + \frac{y}{2,5} = 1$; $\frac{x}{-2,55} + \frac{y}{2,5} = 1$.



SOLUCIONES

10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

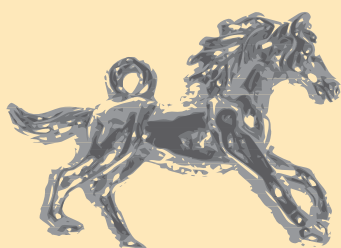
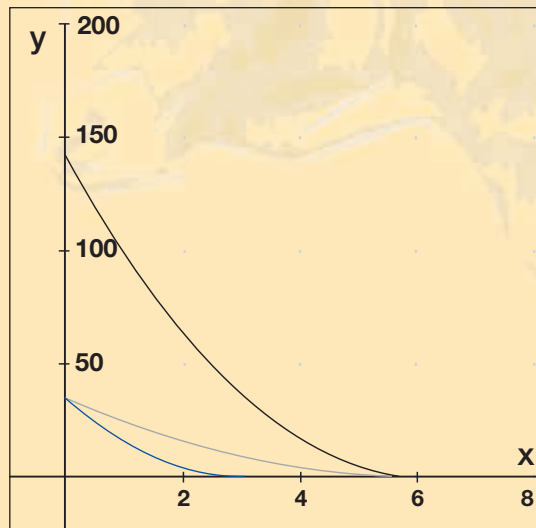
10.1. a) El agua tiene inicialmente una altura de 36 cm. y tarda 6 minutos en vaciarse.

b) La función será $H = (t - 6)^2$.

10.2. Se vacía en la mitad de tiempo pues hemos aumentado la sección de salida al doble. Al ser $t = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{H})$ la función es ahora $H = 4(t - 3)^2$.

10.3. Si $6 = \frac{1}{2}(\sqrt{H_0} - 0)$ se obtiene $H_0 = 144$ cm. Es decir 4 veces la altura anterior. La fórmula es $H = 4(t - 6)^2$.

Se observa que se puede conseguir que dos clepsidras se vacían al mismo tiempo con diferente volumen inicial y dos clepsidras con el mismo volumen se vacían en tiempos distintos.



SOLUCIONES

10.4. Como el agua inicialmente alcanza una altura de 64 cm. tendremos

$t = \frac{1}{k}(8 - \sqrt{H})$. Si queremos que se vacíe en 20 minutos $20 = \frac{1}{k}8$ y la función será $t = 0,2(8 - \sqrt{x})$.

La otra función es $H = 0,16(x - 20)^2$. Al representar ambas funciones se observa que son simétricas respecto de la bisectriz $y=x$ al ser funciones recíprocas.

