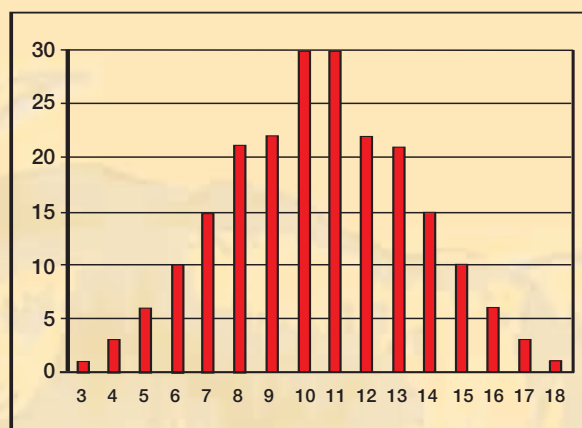


SOLUCIONES

1. JUEGOS DE DADOS: "MARLOTA" Y "RIFFA"

1.1. Se ha utilizado la hoja de cálculo Excel para responder a la pregunta.

suceso	frecuencia	probabilidad	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
3	1	0,005	0,0139	0,0417
4	3	0,014	0,0556	0,2222
5	6	0,028	0,1389	0,6944
6	10	0,046	0,2778	1,6667
7	15	0,069	0,4861	3,4028
8	21	0,097	0,7778	6,2222
9	22	0,102	0,9167	8,25
10	30	0,139	1,3889	13,889
11	30	0,139	1,5278	16,806
12	22	0,102	1,2222	14,667
13	21	0,097	1,2639	16,431
14	15	0,069	0,9722	13,611
15	10	0,046	0,6944	10,417
16	6	0,028	0,4444	7,1111
17	3	0,014	0,2361	4,0139
18	1	0,005	0,0833	1,5
totales	216	1,000	10,5	118,94



media	d.típica	jugadas posibles
10,5	2,95	81,48%

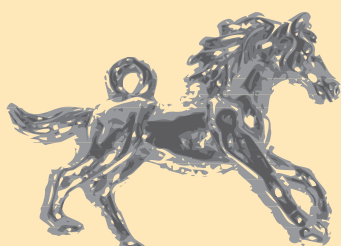
1.2. Igualmente para esta pregunta:

1.3. Para agilizar el juego se han eliminado los resultados menos probables. Hay que observar que los resultados entre 7 y el 14, ambos incluidos, suponen el 81,48% del total de los resultados posibles.

1.4. Elegiría el 10 o el 11 pues son los sucesos que ocurren con más frecuencia. Habría que elegir el 14, que igual que el 8, ocurre 21 de los 216 resultados posibles.

1.5. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

1.6. Hay seis pares iguales (1,1), (2,2),... (6,6); La probabilidad de obtener uno de esos pares es 1/36; Como la probabilidad de obtener uno cualquiera de esos pares es 6/36, cada 6 tiradas aproximadamente aparecerá un par doble.



SOLUCIONES

1.7.

	suma de los tres dados																
2	3	4	5	6	7	8											6
4			5	6	7	8	9	10									6
6					7	8	9	10	11	12							6
8							9	10	11	12	13	14					6
10									11	12	13	14	15	16			6
12											13	14	15	16	17	18	6
totales	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	36

1.8. En el primer caso sólo gano si saco un 6 y mi contrincante un 1, y ganaría 8 a 7. Eso supone una probabilidad de $1/36$.

En el segundo caso, si la suma de los tres dados son: $(2+4,4+1)$, $(2+5,4+1)$, $(2+5,4+2)$, $(2+6,4+1)$, $(2+6,4+2)$, $(2+6,4+3)$ gano "yo". Esto supone una probabilidad de $6/36=1/6$.

1.9. Los sucesos menos probables son las sumas 3, 4, 17 y 18 con probabilidad $1/36$ y las sumas 5, 6, 15 y 16 con probabilidad $2/36$. Eliminando estos sucesos todos los demás tienen la misma probabilidad $3/36=1/12$.

1.10. Se puede organizar un campeonato entre los alumnos y alumnas de la clase.

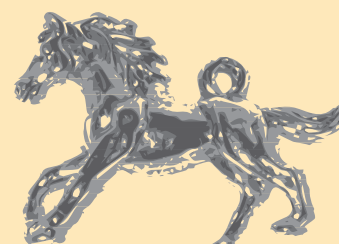
2. EL ÁLGEBRA: SAVASORDA

2.1. a) $a^2 - 2S = h^2 + \frac{b^2}{4} - 2bh = \left(h - \frac{b}{2}\right)^2$, por tanto $\sqrt{a^2 - 2S} = h - \frac{b}{2}$

y finalmente $\frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2} = \frac{h}{2} - \frac{b}{4}$

b) $\frac{a^2 - 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2$ y sumando m.a.m. $\frac{a^2 - 2S}{4} + S = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{bh}{2}$

y operando $\frac{a^2 + 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}\right)^2$ y finalmente $\frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{4}$



SOLUCIONES

c) Sumando ambas expresiones: $h = \frac{\sqrt{a^2+2S}}{2} + \frac{\sqrt{a^2-2S}}{2}$

Restando y multiplicando por 2: $b = \sqrt{a^2+2S} - \sqrt{a^2-2S}$

2.2. a) Si el lado igual mide 5 y el área 12 se tiene: $h=7/2+1/2=4$ y $b=7+1=8$.

b) Si resolvemos el sistema $12 = \frac{b \cdot h}{2}$ y $25 = \frac{b^2}{4} + h^2$ se obtiene la ecuación bicuadrada $b^4 - 100b^2 + 2.304 = 0$ que da dos soluciones $b=8$ y $b=6$. Esto supone que las alturas son $h=3$ y $h=4$.

La solución que no aparece en la fórmula de Bar Hiyya se debe a no considerar el doble signo de las raíces cuadradas.

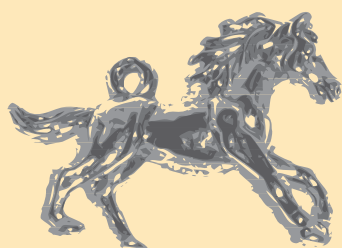
2.3. a) Expresando en función de b se tiene:

$$p = 5 + \frac{b}{2}, p - a = \frac{b}{2}, p - b = \frac{b}{2} \text{ y } p - c = 5 - \frac{b}{2}$$

b) Sustituyendo en la fórmula de Herón $12 = \sqrt{\left(5 + \frac{b}{2}\right) \frac{b}{2} \frac{b}{2} \left(5 - \frac{b}{2}\right)}$ y operando se obtiene la ecuación que da las soluciones $b=8$ y $b=6$.

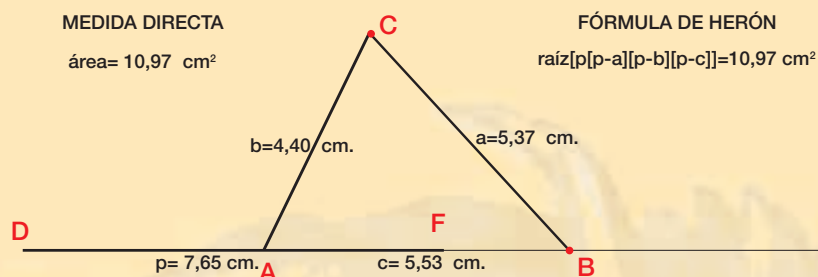
c) Tomando $b=8$, $p = \frac{9+h}{2}$, $p-a = \frac{h-1}{2}$, $p-b = \frac{h+1}{2}$ y $p-c = \frac{9-h}{2}$

Sustituyendo en la fórmula de Herón y operando se obtiene la ecuación $h^4 - 82h^2 + 657 = 0$ que da como solución válida $h=3$.



SOLUCIONES

- 2.4. La solución con Cabri es: Modificando los lados del triángulo siempre se cumple la fórmula de Herón.



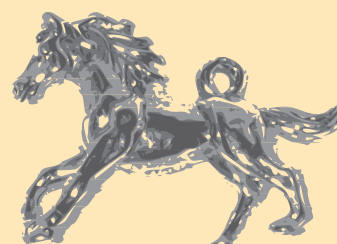
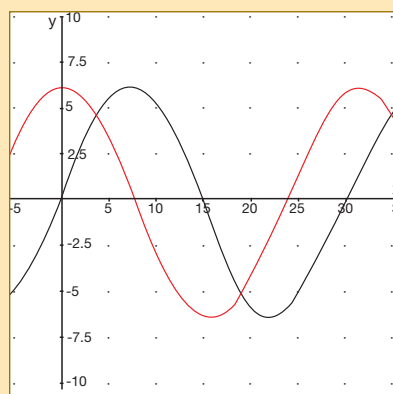
3. LOS ÁRABES Y EL AGUA: LA NORIA

- 3.1. a) Al elegir ese sistema de referencia la ecuación es $x^2+y^2=6^2$.
b) Tomando el origen de ángulos propio de la trigonometría se tiene:

arcaduz	3	12	27	33
ángulo	30°	120°	270°	330°
x	5,20	-3	0	5,20
y	3	5,20	-6	-3

- 3.2. La altura es una función "seno" y la distancia una función "coseno" de amplitud 6 y período 0,30:

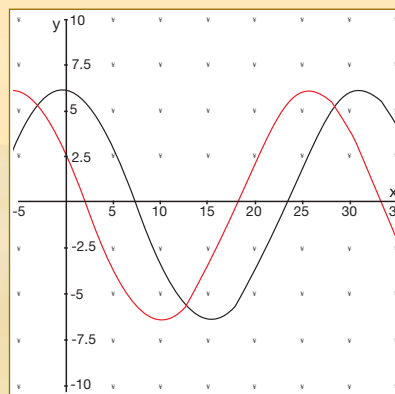
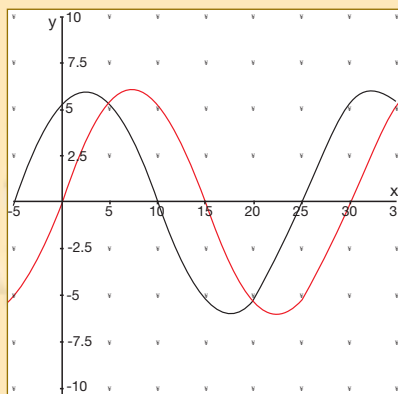
$$h = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right) \quad d = 6 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right)$$



SOLUCIONES

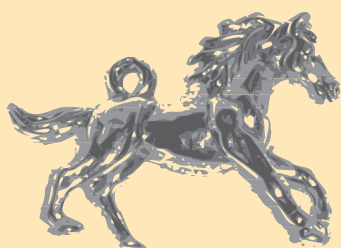
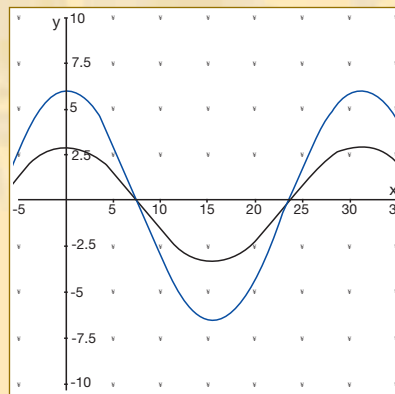
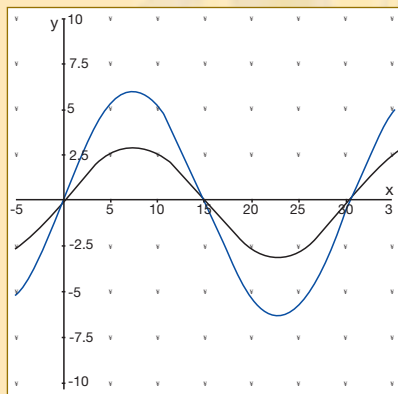
3.3. El arcaduz 6 tiene un “desfase” de 60° :

$$h = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30} + \frac{2 \cdot \pi}{6}\right) \quad d = 6 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30} + \frac{2 \cdot \pi}{6}\right)$$



3.4. La noria de 6 m. de diámetro tiene una amplitud 3:

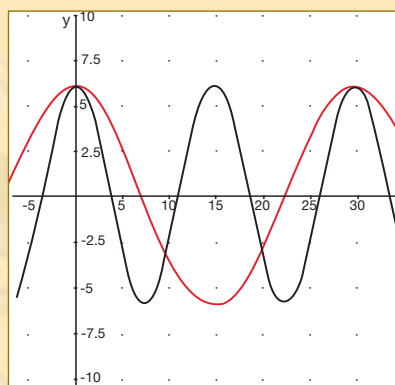
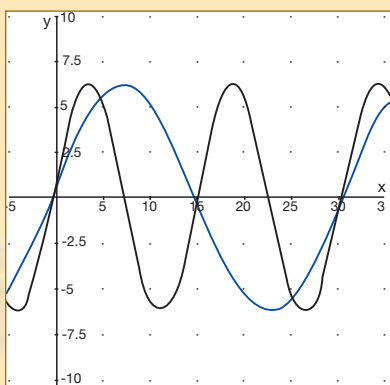
$$h = 3 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right) \quad d = 3 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{30}\right)$$



SOLUCIONES

Si da una vuelta cada 15 s., su período es la mitad:

$$h = 6 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{15}\right) \quad d = 6 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{15}\right)$$



3.5. a) $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = 3,14 \cdot 15^2 \cdot 30 = 21.206 \text{ cm}^3 = 21,206 \text{ l}$

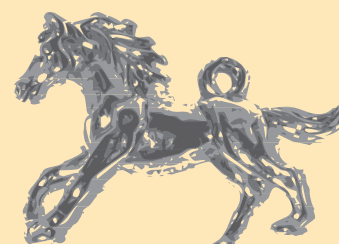
b) Se trata de un problema de optimización:

Si $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$ [I] es el volumen del cilindro y $S = 2\pi \cdot R \cdot H + \pi \cdot R^2$ la superficie metálica se tiene: $S = \frac{2 \cdot V}{R} + \pi \cdot R^2$.

Derivando e igualando a cero: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ y reemplazando en [I] se obtiene $H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

La derivada segunda garantiza que es un mínimo: $S'' = \frac{4 \cdot V}{R^3}$.

c) Con las dimensiones iniciales $S = 2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 30 + \pi \cdot 15^2 = 3.534,29 \text{ cm}^2$. de chapa. Pero si $R=H$ y debe contener 21.206 cm^3 de agua, se tiene: $21.206 = \pi \cdot R^3$ y $R=H=18,90 \text{ cm}$. Por tanto $S = 3 \cdot \pi \cdot R^2 = 3.366,62 \text{ cm}^2$. Esto supone un ahorro de un 5%.

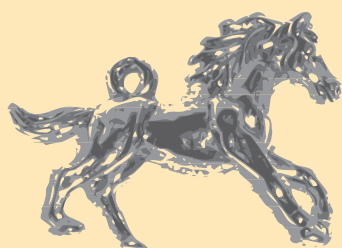


SOLUCIONES

- 3.6. Al dar dos vueltas por minuto y disponer de 36 arcaduces de 21,206 litros se tiene: $21,206 \cdot 36 \cdot 2 = 1.526,8$ litros. Si se retiraran 12 arcaduces pero la duración del giro fuera 20 s. el resultado sería el mismo: $21,206 \cdot 24 \cdot 3 = 1.526,8$ litros.
- 3.7. Se pretende que el alumno/a diseñe una noria teniendo en cuenta las variables que se indican. Deberá definir el tamaño del arcaduz, el número de arcaduces teniendo en cuenta el tamaño de la noria, etc.

4. JUAN CARAMUEL: INICIO DE LA PROBABILIDAD

- 4.1. Las sumas posibles son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Las probabilidades de cada suceso son $1/36$, $2/36$, $3/36$, $4/36$, $5/36$, $6/36$, $5/36$, $4/36$, $3/36$, $2/36$ y $1/36$ respectivamente.
- 4.2. Al lanzar 3 dados hay 216 posibilidades. La suma 9 se presenta en los casos (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3) y la suma 10 en (1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4). Esto supone 6 ternas para cada apuesta y aparentemente dos sucesos igualmente probables. Pero como las ternas con dos elementos iguales representan 3 casos y las de tres elementos diferentes a 6 casos dependiendo del dado, entonces $p(9) = 25/216$ y $p(10) = 27/216$.
- 4.3. Mediante el diagrama de árbol correspondiente:
- En el caso (3,1): $p(A) = \frac{1}{8}$ y $p(B) = \frac{7}{8}$. Reparto 1:7.
- En el caso (4,1): $p(A) = \frac{1}{16}$ y $p(B) = \frac{15}{16}$. Reparto 1:15.
- En general (n,1): $p(A) = \frac{1}{2^n}$ y $p(B) = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Reparto $1:2^n - 1$.



SOLUCIONES

4.4. Mediante el diagrama de árbol correspondiente:

En el caso (2,2) el reparto es 1:1 como es lógico.

En el caso (3,2) el reparto es 5:11.

En el caso (4,2) el reparto es 6:26 ó 3:13.

4.5. Mediante el diagrama de árbol correspondiente:

En el caso (2,1,1) el reparto es 4:4:1.

En el caso (2,2,1) el reparto es 5:5:17.

4.6. a) El jugador A ganará a la 1ª, 3ª, 5ª, ... tirada:

$$p(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{6} \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{6}{11}$$

b) El jugador B ganará a la 2ª, 4ª, 6ª, ... tirada:

$$p(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \dots = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{5}{11}$$

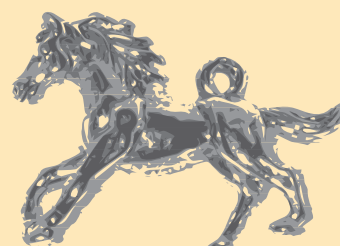
Luego el reparto de la apuesta será 6:5.

4.7. Si analizamos la probabilidad del paso (1,2) -> (0,2) supone que Antonio ganaría si saliera 5 en la 1ª tirada, o en la segunda si en la primera no hubiera salido el 5 ni el 3 pues habría ganado Bernardo, y así sucesivamente:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Luego el paso (1,2) -> (1,1) tiene la misma probabilidad y la misma el paso (1,1) -> (1,0) o el paso (1,1) -> (0,1).

Por tanto es un caso idéntico al ejemplo de introducción, y en consecuencia el reparto ha de ser 3:1 y como han puesto 20.000 monedas, le corresponderían 15.000 monedas Antonio y 5.000 monedas a Bernardo. Hay que observar que si nos fijáramos en un reparto proporcional a las partidas ganadas o a las partidas que faltan para ganar la proporción sería 1:2.



SOLUCIONES

5. HORCHATA DE CHUFA VALENCIANA

- 5.1. Sean x e y los días que tardaría cada tractor por separado, entonces planteamos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{8}{x} + \frac{8}{y} = 1 \\ \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

El primer tractor tardará 12 días mientras que el segundo tardará 24 días.

- 5.2. Sean x e y los días que tardaría cada tractor por separado y t el tiempo que están los tractores trabajando simultáneamente, entonces planteamos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20} \\ \frac{t+1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{t}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

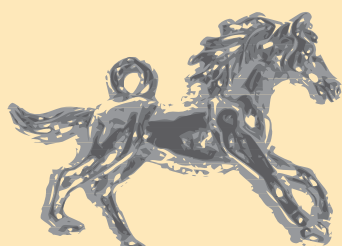
Si eliminamos el tiempo en las dos últimas ecuaciones, obtenemos el sistema formado por la primera ecuación y la ecuación: $x-y=2$.

El primer camión tardará 10 horas y 8 horas el segundo.

- 5.3. Si el porcentaje pedido: p
Producción del año inicial : x
Producción en el primer año: $1,05x$
Producción en el segundo año: $(1,05x) \cdot 1,08 = 1,134x$
Producción en el tercer año:
 $(1,134x) \cdot (1+p/100) = 1,134x + 0,01134px$
Planteamos la ecuación:

$$\frac{(1,05x - x) + (1,134x - 1,05x) + 1,134x + 0,01134px - 1,134x}{3} = 0,1x$$

Obteniéndose el 14,64%.



SOLUCIONES

- 5.4. Sea "x" la cantidad que toma del primer depósito y "100-x" la que toma del segundo. Entonces planteamos la ecuación:

$$\frac{2}{13}x + \frac{3}{10}(100 - x) = 20 \text{ y obtenemos } 68,42 \text{ litros en el primer depósito y } 31,52 \text{ litros en el segundo depósito.}$$

6. RAMÓN LLULL Y LA COMBINATORIA

6.1. a) $C_{8,2} = 28$ b) $C_{8,3} = 56$

- 6.2. $C_{20,2} - 20 = 170$ (los 20 vértices se pueden unir de $C_{20,2}$ maneras para obtener las diagonales pero luego hay que restar a esta cantidad los vértices consecutivos ya que estos no forman diagonales sino los lados del polígono).

6.3. $C_{10,3} - C_{4,3} = 116$

6.4. $C_{7,4} = 35$

6.5. $C_{8,2} = 28$

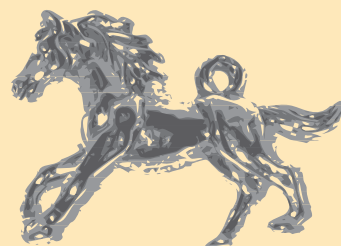
- 6.6. $C_{9,4} = 126$ (Sean A, B, C, D, E, F, G, H, I los 10 alumnos. Si separamos uno de ellos, por ejemplo el A, nos queda un conjunto de 9 elementos, de ese conjunto se pueden extraer $C_{9,4} = 126$ subconjuntos de 5 elementos. Cada uno de dichos subconjuntos define un subconjunto de 6 elementos: el que está integrado por los 5 elementos sobrantes).

6.7. $C_{9,6} = 84$

6.8. $C_{11,6} = 462$

6.9. $C_{8,6} = 28$

6.10. $128 (C_{7,0} + C_{7,1} + C_{7,2} + \dots + C_{7,7} = (1+1)^7)$



SOLUCIONES

7. AL-QALASADI: EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

7.1. Se trata de completar la demostración.

$$7.2. 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + \dots k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

$$7.3. \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 5}$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \frac{1}{(k+3)(k+4)} + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{k}{4(k+4)} + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{k+1}{4(k+5)}$$

$$7.4. 1 \cdot 4 = 1(1+1)^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots k(3k+1) + (k+1)(3(k+1)+1) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$$

8. LOS REPARTOS Y EL TALMUD

8.1.

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 200$$

$$r_3 = 300 \quad E = 300 \quad \sum r_i = 600$$

$$p_1 = \frac{100}{600} \cdot 300 = 50$$

$$p_2 = \frac{200}{600} \cdot 300 = 100$$

$$p_3 = \frac{300}{600} \cdot 300 = 150$$

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 200$$

$$r_3 = 300 \quad E = 100$$

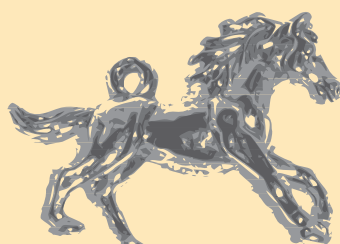
$$I_1 = \frac{100}{3} = 33, \hat{3}$$

$$I_2 = \frac{100}{3} = 33, \hat{3}$$

$$I_3 = \frac{100}{3} = 33, \hat{3}$$

8.2. Regla Igualitaria

A cada una le correspondería $33, \hat{3}$



SOLUCIONES

$$r_1 = 50$$

8.3. Regla Igualitaria Restringida de pérdidas. $r_2 = 150$

$$r_3 = 200 \quad E = 100$$

- Calculamos lo que pierden entre los tres: $(50+150+200)-100=300$.
- Si lo reparten por igual entre los tres, pierde cada uno $300/3=100 = \lambda$ (posible λ).
- El primero no puede perder 100 porque es más de lo que le deben, entonces pierde 50 y lo descontamos de las pérdidas para calcular λ .
- Pérdidas = $350 - 100 = 250$ las repartimos entre los otros dos $\lambda = 250/2 = 125$.

$$\begin{array}{ccccccc} \max(0; 50 - \lambda) & + & \max(0; 150 - \lambda) & + & \max(0; 200 - \lambda) & = & 100 \\ 0 & + & 25 & + & 75 & = & 100 \end{array}$$

Al primero le corresponde 0, al segundo 25 y al tercero 75.

8.4. Regla del Talmud

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 200$$

$$r_3 = 300 \quad E = 200$$

$$100 + 200 + 300 = 600 \quad \frac{600}{2} = 300 \geq 200$$

Supongamos que repartimos E entre los tres a partes iguales:

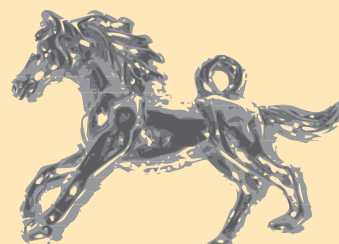
$$\frac{200}{3} = 66,6 = \lambda \text{ pero al primero le corresponde 50, luego recalculamos}$$

$$\lambda: 200 - 50 = 150; \quad 150/2 = 75 = \lambda$$

$$t_1 = \min(50; \lambda) = 50$$

$$t_2 = \min(100; \lambda) = 75$$

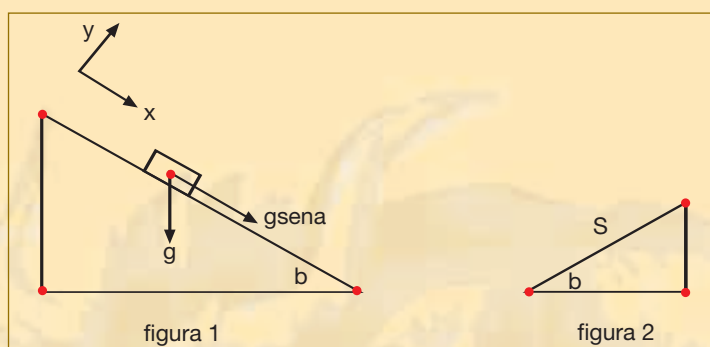
$$t_3 = \min(150; \lambda) = 75$$



SOLUCIONES

9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1.



Sabemos que la distancia recorrida por un objeto que se mueve con movimiento uniformemente acelerado es: $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

De la figura 2 se deduce que:

$$\cos b = \frac{x}{s} \quad s = \frac{x}{\cos b}$$

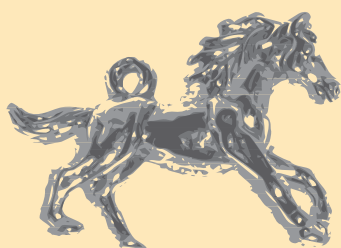
Sustituyendo en la ecuación anterior (y teniendo en cuenta que $s_0 = 0$ y $v_0 = 0$) tenemos:

$$\frac{x}{\cos b} = \frac{1}{2} g t^2 \sin(b) \Rightarrow 2x = g t^2 \sin(b) \cos(b)$$

$$\Rightarrow 2x = g t^2 \frac{\sin(2b)}{2} \Rightarrow 4x = g t^2 \sin(2b) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4x}{g \sin 2b}}$$

Para que t sea mínimo, $g \sin(2b)$ debe ser lo más grande posible, lo cual sucede cuando $\sin(2b) = 1$ y por tanto: $2b = 90^\circ$ $b = 45^\circ$.

- 9.2. a) $r = 0,981$. La relación es directa al ser $r > 0$.
b) $y = 1,27x - 12,13$.
c) Cabe esperar una temperatura mínima de $15,81^\circ\text{C}$. Para una temperatura de 40°C el resultado que obtengamos no va a ser fiable ya que esa temperatura se aleja de las temperaturas dadas en la tabla.



SOLUCIONES

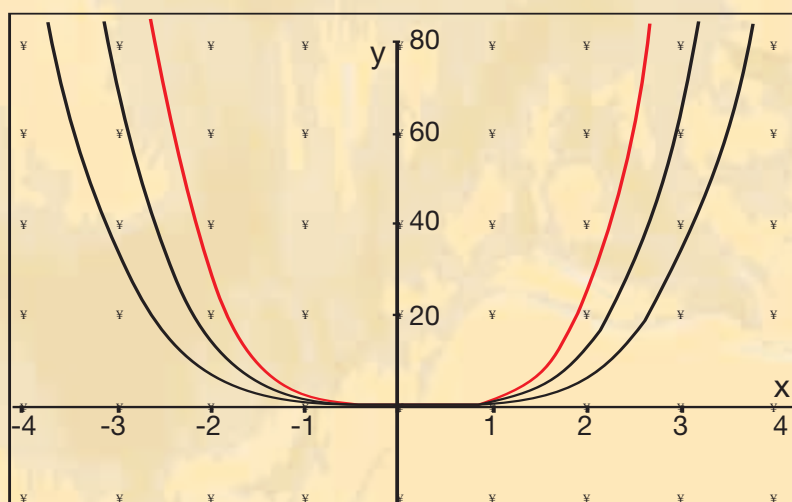
d) La temperatura será de $21,3^{\circ}\text{C}$ (en la ecuación de la recta de regresión de *y sobre x*, despejar la "x" y sustituir el valor de la "y").

9.3. Si llamamos "h" a la altura de la cruz y "d" a la distancia a la barraca se

$$\text{verifica: } \begin{cases} \text{tg}(60) = \frac{500}{d} \\ \text{tg}(61,5) = \frac{500 + h}{d} \end{cases} \text{ de donde } d = 2,89 \text{ m. y } h = 31$$

10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

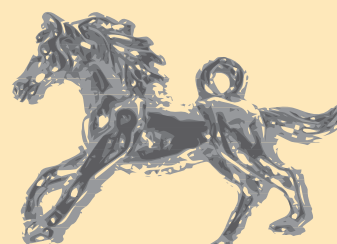
10.1. Al aumentar el valor del parámetro la gráfica se "abre" la gráfica, es decir, crece más lentamente.



10.2. Vamos a expresar el volumen del cilindro en función de H.

Teniendo en cuenta que $R^2 = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{A}}$, sustituyendo en el volumen del cilindro

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{H}{A}} \cdot H = \frac{\pi}{\sqrt{A}} H^{\frac{3}{2}}. \text{ Por tanto la relación es siempre } \frac{V_{\text{clepsidra}}}{V_{\text{cilindro}}} = \frac{2}{3}.$$



SOLUCIONES

10.3.

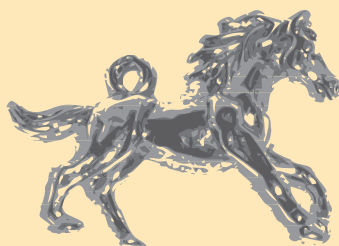
TIEMPO	ALTURA	RADIO	V.CLEPSIDRA	V.CILINDRO	PORCENTAJE	VARIACIÓN
	50 cm.	22,36 cm.	52,36 litros	78,54 litros	66,67%	
0 h	48 cm.	22,13 cm.	49,25 litros	73,87 litros	66,67%	-3,11 litros
1 h	46 cm.	21,90 cm.	46,20 litros	69,31 litros	66,67%	-3,05 litros
2 h	44 cm.	21,66 cm.	43,22 litros	64,84 litros	66,67%	-2,98 litros
3 h	42 cm.	21,41 cm.	40,31 litros	60,47 litros	66,67%	-2,91 litros
4 h	40 cm.	21,15 cm.	37,47 litros	56,20 litros	66,67%	-2,84 litros
5 h	38 cm.	20,88 cm.	34,69 litros	52,04 litros	66,67%	-2,77 litros
6 h	36 cm.	20,60 cm.	31,99 litros	47,98 litros	66,67%	-2,70 litros
7 h	34 cm.	20,31 cm.	29,36 litros	44,04 litros	66,67%	-2,63 litros
8 h	32 cm.	20,00 cm.	26,81 litros	40,21 litros	66,67%	-2,55 litros
9 h	30 cm.	19,68 cm.	24,33 litros	36,50 litros	66,67%	-2,47 litros
10 h	28 cm.	19,34 cm.	21,94 litros	32,91 litros	66,67%	-2,39 litros
11 h	26 cm.	18,99 cm.	19,63 litros	29,45 litros	66,67%	-2,31 litros
12 h	24 cm.	18,61 cm.	17,41 litros	26,12 litros	66,67%	-2,22 litros
13 h	22 cm.	18,21 cm.	15,28 litros	22,92 litros	66,67%	-2,13 litros
14 h	20 cm.	17,78 cm.	13,25 litros	19,87 litros	66,67%	-2,04 litros
15 h	18 cm.	17,32 cm.	11,31 litros	16,96 litros	66,67%	-1,94 litros
16 h	16 cm.	16,82 cm.	9,48 litros	14,22 litros	66,67%	-1,83 litros
17 h	14 cm.	16,27 cm.	7,76 litros	11,64 litros	66,67%	-1,72 litros
18 h	12 cm.	15,65 cm.	6,16 litros	9,23 litros	66,67%	-1,60 litros
19 h	10 cm.	14,95 cm.	4,68 litros	7,02 litros	66,67%	-1,47 litros
20 h	8 cm.	14,14 cm.	3,35 litros	5,03 litros	66,67%	-1,33 litros
21 h	6 cm.	13,16 cm.	2,18 litros	3,26 litros	66,67%	-1,17 litros
22 h	4 cm.	11,89 cm.	1,18 litros	1,78 litros	66,67%	-0,99 litros
23 h	2 cm.	10,00 cm.	0,42 litros	0,63 litros	66,67%	-0,77 litros
24 h	0 cm.	0,00 cm.	0,00 litros	0,00 litros		-0,42 litros
		A	0,0002			

10.4. Como $24 = k(48-0)$, se tiene $k = 0,5$ y $t = 0,5(48-H)$.

10.5. a) Si $H = A \cdot R^4$ entonces $R = \sqrt[4]{\frac{H}{A}}$

b) Aplicando el cálculo integral para el cálculo de volúmenes de revolución:

$$V(H) = \pi \int_0^H R^2 \cdot dH = \frac{\pi}{\sqrt{A}} \int_0^H \sqrt{H} \cdot dH = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}} \sqrt{H^3}$$



SOLUCIONES

APÉNDICE

Demostración de la fórmula $t = k(H_0 - H)$:

El caudal $Q = -\frac{dV}{dt} = -\frac{dV}{dH} \cdot \frac{dH}{dt} = -\frac{\pi}{\sqrt{A}} \sqrt{H} \frac{dH}{dt}$ siendo $V(H) = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}} \sqrt{H^3}$. Por el teorema de Torricelli, la velocidad de salida del agua depende de la altura de la misma en el recipiente de acuerdo con la fórmula $v = \sqrt{2gH}$. Por tanto el caudal dependerá de la sección del orificio de salida (S) y de la velocidad (v):

$$Q = S\sqrt{2gH} = -\frac{\pi}{\sqrt{A}} \sqrt{H} \frac{dH}{dt}$$

Separando variables: $dt = -\frac{\pi}{S\sqrt{2gA}} dH = -CdH$

Integrando: $\int_0^t dt = -C \int_{H_0}^H dH$ se tiene $t = C(H_0 - H)$ que indica que la velocidad de descenso del nivel del agua es constante.

