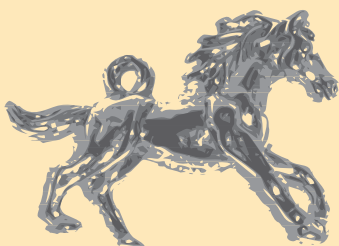


IBERIA

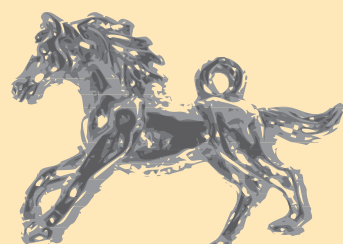
FITXES DE TREBALL. ÍNDEX DE CONTINGUTS

ACTIVITAT	BLOC	CONTINGUTS
1. Jocs de daus: "Marlota" i "Riffa"	-Probabilitat	-Distribucions de probabilitat
2. L'àlgebra: Savasorda	-Àlgebra i Geometria	-Resolució de triangles
3. Els àrabs i l'aigua: la sènia	-Anàlisi de funcions	-Funcions circulars
4. Juan Caramuel: inici de la probabilitat	-Probabilitat	-Probabilitat composta
5. Orxata de xufa valenciana	-Aritmètica i Àlgebra	-Percentatges, repartiments
6. Ramón Llull i la combinatòria	-Combinatòria	-Nombres combinatoris
7. Al-Qalasadi: el principi d'inducció	-Àlgebra	-Principi d'inducció
8. Els repartiments i el talmud	-Aritmètica i Àlgebra	-Problemes de repartiment
9. La barraca valenciana	-Anàlisi -Estadística -Geometria	-Funcions, regressió i trigonometria
10. La clepsidra: rellotge d'aigua	-Anàlisi de funcions	-Funcions i càlcul integral

Batxillerat. Matemàtiques,
Ibèria



Batrillerat. Matemàtiques, **IBèmia**



1. JOCS DE DAUS: "MARLOTA" I "RIFFA"

Molts dels jocs que coneixem, han arribat fins a nosaltres gràcies a Alfonso X el, rei de Castella i Lleó, que va néixer a Toledo en 1221 i va morir a Sevilla en 1284, regnant des de 1252 fins a la seua mort.

Conegut com "El Savi" per la seua important contribució al camp de la cultura afavorint l'intercanvi entre les civilitzacions cristiana, musulmana i jueva a través de la "Escola de Traductors de Toledo" que ell mateix va fundar.



En el seu regnat es van elaborar "Les taules astronòmiques alfonsies" que van ser utilitzades pel mateix Copèrnic.

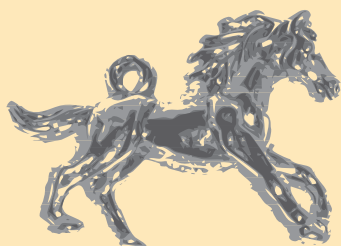
Pel que fa als jocs va manar produir "El llibre dels escacs, daus i taules". Coneixereu dos jocs de daus que vénen arreplegats en eixe llibre.

MARLOTA

Un jugador llança dos daus i la suma obtinguda és la seua aposta. Després llança de nou els daus i la nova suma és l'aposta del contrincant. Finalment llança els daus successivament fins que la suma coincidisca amb alguna de les dos apostes. En eixe moment acaba la partida i guanya el jugador que la seua aposta coincidix amb el resultat.

En el joc no es consideren vàlids els resultats amb suma inferior a 7 o superior a 14.

- 1.1. Fes una taula amb tots els resultats possibles i la seua freqüència. Calcula la probabilitat de cada un d'ells.
- 1.2. Representa la distribució de probabilitat i calcula la seua mitjana i la seua desviació típica.



1. JOCS DE DAUS: "MARLOTA" I "RIFFA"

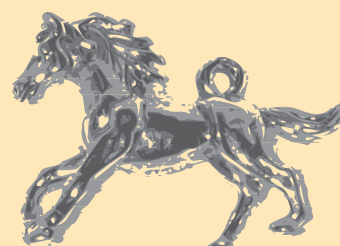
- 1.3. Per què creus que en el joc no es tenen en compte alguns resultat?
- 1.4. Si pogueres triar un resultat per a jugar contra el teu contrincant, quin triaries? Si el teu número és el 8, quin hauria de tindre el teu contrincant perquè el joc fóra just?
- 1.5. Juga diverses partides amb el teu company o companya.

Pots utilitzar un full de càlcul per a contestar a les preguntes anteriors.

RIFFA

Un jugador llança dos daus fins que isquen iguals i després llança un tercer dau i anota la suma dels tres. Un altre jugador fa el mateix. Guanyarà el que obtinga la puntuació més alta.

- 1.6. Quants parells iguals hi ha al llançar dos daus? Quina probabilitat hi ha que isca el parell (3,3)? Amb quina freqüència, aproximadament, eixirà un parell idèntic?
- 1.7. Fes una taula de la freqüència de la suma dels tres daus, considerant que els dos primers són iguals.
- 1.8. Si mon parell és el (2,2) i el del meu contrincant el (4,4), quina probabilitat tinc de guanyar quan llancem l'altre dau? I si el meu company ha tret el (3,3)?
- 1.9. Quines tirades eliminaries per a fer el joc equiprobable?
- 1.10. Juga diverses partides amb el teu company o companya.



2. L'ÀLGEBRA: SAVASORDA

En la Catalunya medieval cal reservar un lloc d'honor a **Abraham bar Hiyya**, més conegut per **Savasorda** (cap de la guàrdia), matemàtic i astrònom jueu nascut en 1065 i mort en 1136 a Barcelona.

Autor d'una obra notable en hebreu, composta per a iniciar en la ciència àrab a les comunitats jueves. En col·laboració amb **Plató de Tívoli** va escriure *Líber embadorum* compost en hebreu i traduït per Tívoli al llatí.

Tracta de les equacions de 2n grau. És un tractat d'agrimensura dedicat al càlcul de superfícies. En tal text es troba la fórmula d'Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

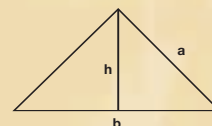
Encara que la dita fórmula era coneguda ja pels agrimensors romans, els occidentals veuran la seua demostració en els *Verba filiorum Moysi* (*Banu Musa*) traduïts per **Gerardo de Cremona**.



Com a reconeixement als seus treballs d'Astronomia hi ha un cràter en La Lluna amb el seu nom.

- 2.1. Un dels problemes resolts per Bar Hiyya va ser determinar en un triangle isòsceles la base i l'altura coneixent l'àrea i el costat igual.

Amb un poc d'ajuda demostraràs les fórmules que va obtenir este matemàtic jueu.



Del triangle de la figura es dedueixen les fórmules:

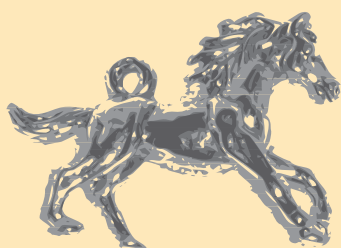
$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad [I] \quad S = \frac{b \cdot h}{2} \quad [II]$$

a) A partir de dedueix $a^2 - 2S$ deduce $\frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2} = \frac{h}{2} - \frac{b}{4} \quad [III]$

b) Eleva al quadrat, summa membre a membre $a^2 = h^2$.

i dedueix l'expressió $\frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{4} \quad [IV]$

c) A partir de [III] i [IV] obtén les fórmules per a calcular h i b coneguts S i a.



2. L'ÀLGEBRA: SAVASORDA

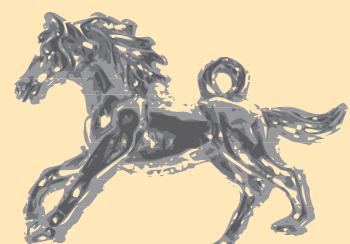
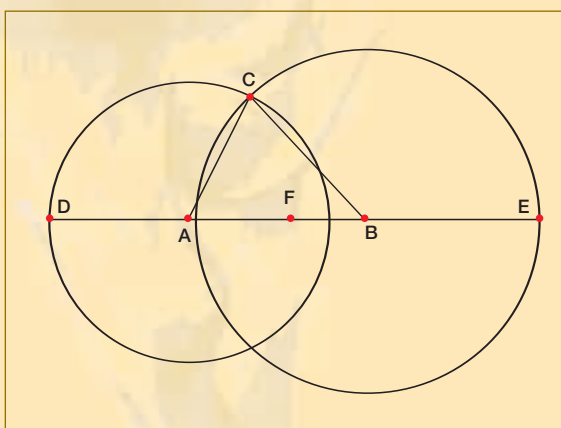
- 2.2. a) Aplica les fórmules obtingudes per a calcular l'altura i la base d'un triangle isòceles en què el costat igual mesura 5 i l'àrea 12.
b) Si substituïxes les dades en [I] i [II] tens un sistema d'equacions. Resol-lo i comenta els resultats.

- 2.3. Com ja saps, Bar Hiyya coneixia la fórmula d'Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Resoldràs el problema anterior utilitzant exclusivament eixa fórmula:

- a) Expressa p , $p-a$, $p-b$ i $p-c$ en funció de b .
b) Substituïx en la fórmula i resol l'equació biquadrada que obtingues.
c) Si et fixes en un dels dos triangles equilàters expressa p , $p-a$, $p-b$ i $p-c$ en funció de h i substituïx en la fórmula d'Herón. Resol l'equació.
2.4. Si coneixes el programa Cabri podràs comprovar geomètricament la fórmula d'Herón:
a) Dibuixa un triangle qualsevol de vèrtexs A , B i C .
b) Dibuixa un cercle de centre A i radi AC i un altre de centre B i radi BC .
c) Prolonga la base AB fins que talle a les circumferències en D i E .
d) Determina el Segment de i obtén el seu punt mitjà F i oculta els cercles.
e) El segment DF és el semiperímetre.
f) Mesura l'àrea del triangle, els seus costats i el semiperímetre.
g) Amb la calculadora comprova la fórmula.



3. ELS ÀRABS I L'AIGUA: LA SÉNIA

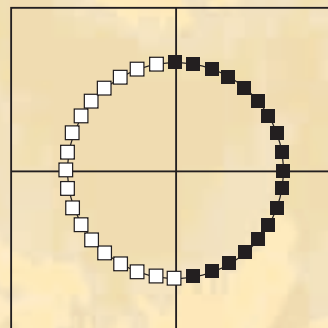
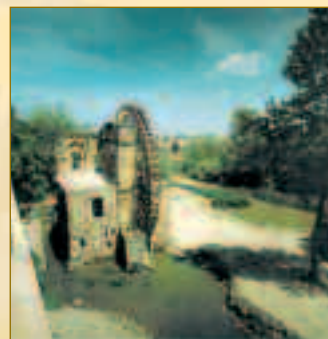
L'aigua és un element essencial sense el qual no pot entendre's la cultura islàmica, sent el recurs basant-se en el qual es dissenyen les ciutats musulmanes a partir dels seus primers temps.

L'origen de les sènies és molt antic. Marco Vitrubio Polió (segle I a.C.) arquitecte romà al servici de l'emperador Julio Cèsar ens dona a conèixer diversos tipus de rodes elevadores d'aigua. Va ser a través dels romans com va arribar a la Península Ibèrica. Però es deu als àrabs del període andalusí la difusió i perfeccionament a gran escala d'este i altres procediments hidràulics.

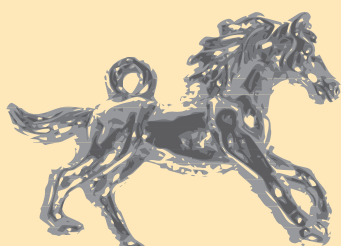
La sènia és una roda de què pegen uns recipients que arrepleguen l'aigua. Cada un d'estos recipients rep el nom de catúfol o canó. Esta denominació com la pròpia paraula "sènia" són d'origen àrab. El moviment de la sènia s'aconsegueix de manera hidràulica i en les sènies més xicotetes per tracció animal.

El gir de la sènia permet que els canons buits s'ompliguen al passar pel corrent d'aigua i quan arriben a la part superior bolquen l'aigua en un canal i així s'aconsegueix elevar l'aigua.

L'esquema representa una sènia amb 36 canons. S'han triat els eixos de coordenades de manera que l'origen estiga en el centre de la sènia. La sènia gira de dreta a esquerra, omplint d'aigua els canons i buidant-los a l'arribar a la part més alta.

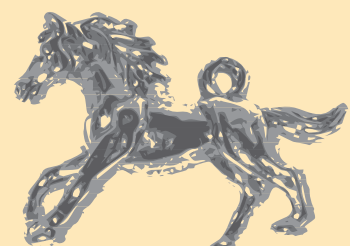


- 3.1. a) Si el diàmetre de la sènia és de 12 m. Quina és l'equació de la circumferència que descriu la sènia? Numerarem com el canó 1 el que es troba en la part dreta immediatament damunt de l'eix horitzontal.
b) Quines coordenades tenen els canons 3, 12, 27 i 33?
- 3.2. Si la sènia pega una volta completa cada 30 s. escriu les equacions de les funcions que expressen:
a) L'altura del canó 36 en funció del temps.
b) Distància del canó 36 a l'eix vertical de la sènia en funció del temps.
Representa les gràfiques de les dos funcions.



3. ELS ÀRABS I L'AIGUA: LA SÉNIA

- 3.3. Quines serien les funcions i les seues gràfiques corresponents per al moviment del canó 6? Representa-les conjuntament amb les primeres gràfiques.
- 3.4. Quines fórmules i quines gràfiques s'obtidrien per a una sènia de 6 m. de diàmetre? I si la sènia inicial tardara 15 s. a donar una volta?
- 3.5. Els catúfols de la sènia de la figura són cilíndrics.
a) Suposem que el seu diàmetre i la seua altura mesuren 30 cm. quin és el seu volum?
b) Demostra que, per a un volum donat, les dimensions $R=H$ optimitzen el gasto del metall de catúfol.
c) Si utilitzàrem un catúfol d'este tipus, en quant es reduiria el cost?
- 3.6. Calcular per al tipus de canó i una velocitat d'una volta per minut, la quantitat d'aigua elevada.
I si es retiraren la tercera part dels catúfols i així augmentara la velocitat en 10 s. per volta?
- 3.7. Dissenya una sènia que puga elevar uns 600 litres per minut, amb les següents característiques:
a) velocitat superior a 2 voltes per minut.
b) Radi de la sènia menor de 12 m.
c) Nombre màxim de catúfols 24.



4. JUAN CARAMUEL: INICI DE LA PROBABILITAT

Espanya ha anat sempre amb gran retard en el coneixement i estudi de les Matemàtiques dels últims segles. Però és en l'origen del Càlcul de Probabilitats on destaca Juan Caramuel Lobkowitz (1606-1682) cèlebre per la seua saviesa i enciclopedisme.

Va nèixer a Madrid i als dèssset anys va ingressar en l'orde cistercenca. Va cursar estudis en les Universitats d'Alcalà, Salamanca i va aconseguir el títol de doctor en la de Lovaina. Va cultivar les més variades matèries com ara les matemàtiques, l'astronomia, l'arquitectura, la teologia, etc., a les que la seua vasta cultura, pròpia d'un home del Renaixement, i gran enginy va dedicar més de dos centenars d'obres.

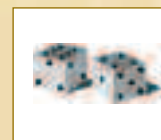


- 4.1. Este problema va ser analitzat correctament per Caramuel:
- Quantes sumes possibles hi ha al llançar dos daus?
 - Calcula la probabilitat de cada una de les sumes possibles.

- 4.2. Una situació anàloga però més complexa és la que li va plantejar el Príncep de Toscaza a Galileu: "Per què quan es llancen tres daus, obtenim amb més freqüència la suma 10 que la suma 9, encara que hi ha les mateixes formes d'aconseguir 9 que 10?". Sabries explicar-ho?

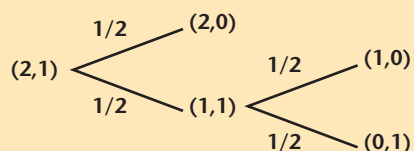
Caramuel tractarà de resoldre també el problema de la divisió d'apostes.

Vegem com ho exposa: "Moltes vegades ocorre que per motius diversos, el joc es dona per acabat. I diràs què cal fer amb els depòsits de diners? Ací està la pregunta i la seua solució: No sols ens referirem als daus, sinó també a la pilota i a qualsevol classe de jocs, la qual cosa mereix que els examinem amb atenció".

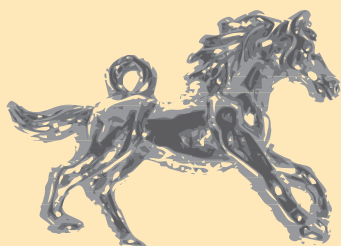


I, a partir d'este enunciat resoldrà este problema de la divisió d'apostes entre dos jugadors de què a un li falta una partida per a guanyar i a l'altre 2, 3, 4... etc.

Si quedaren 2 apostes a A i una aposta a B dissenyem la situació per mitjà del parell (2,1). Per mitjà del diagrama d'arbre calculem la probabilitat de guanyar cada un:



$$p(A) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} . \text{ Després el repartiment ha de ser } 1:3.$$

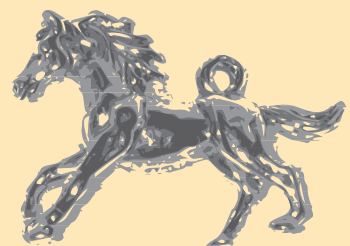


Caramuel no va seguir este raonament!



4. JUAN CARAMUEL: INICI DE LA PROBABILITAT

- 4.3. Resol els casos (3,1) i (4,1). Troba una llei general per al cas (n,1).
- 4.4. Sabries trobar la solució per als casos (2,2), (3,2) i (4,2)?
- 4.5. Caramuel va intentar resoldre situacions amb tres jugadors equivocant-se en la solució.
Utilitzant la mateixa tècnica que en l'exercici anterior dona el resultat correcte per al cas (2,1,1) i (2,2,1).
En el primer cas va donar com a repartiment 2:5:5 i en el segon 2:1:1.
- 4.6. Un últim problema resolt incorrectament per Juan Caramuel va ser és següent: *Es llança un dau i guanya el primer que obtinga un cert nombre de l'1 al 6. A l'interrompre's el joc sorgix la necessitat esbrinar la proporció en què s'han de repartir el que aposta.*
La resposta de Caramuel és que s'ha de repartir segons les raons 37 a 35, respectivament, entre A (el primer que hauria de seguir el joc) i B (el jugador que jugaria quan fallara l'altre).
a) Quina és la probabilitat que guanyi A en la primera tirada? I en la tercer? I en la quinta? I que guanyi A?
b) Fes el mateix per a B i indica la proporció en què s'han de repartir l'aposta.
- 4.7. Un problema d'este tipus és que va proposar a Blaise Pascal el cavaller de Vaig mesclar en 1654: *Dos jugadors: Antonio i Bernardo, posen sobre la taula 10.000 monedes cada u. Un àrbitre tirarà un dau diverses vegades seguides. Cada un dels jugadors triarà un número entre l'1 i el 6. Antonio tria el 5 i Bernardo el 3. S'emportarà les 20.000 monedes aquell el número del qual isca primer tres vegades. Resulta que després d'unes quantes tirades el 5 ha eixit dos vegades i el 3 només ha eixit una vegada. En este moment Bernardo rep un missatge pel qual ha d'abandonar necessàriament la partida. Com repartir de mode just i equitatiu les 20.000 monedes.*
Pascal va pensar molt, va escriure al seu amic Fermat i per diferents camins van donar ambdós amb la mateixa solució del problema i amb un muntó enorme d'idees: la **Teoria de la Probabilitat** havia començat.
Resol el problema que va ser tan important per a l'inici del càlcul de probabilitats.



5. ORXATA DE XUFA VALENCIANA

El fruit sec que s'anomena "xufa" té el seu origen en l'antic Egipte. És una de les primeres collites domesticades pels humans. De fet, els arqueòlegs trobaven pitxers amb xufes en les tombes dels faraons. Els àrabs van introduir este tubèrcul en terres de la península durant els anys 700 d.C. a 1200 d.C. València va ser la més apropiada per al seu cultiu, encara que es cultiva en tot Espanya. Amb les xufes es produeix l'orxata. Esta és molt beneficiosa per a la salut per ser altament energètica i diürètica, amb alts continguts en ferro i potassi i no contindre sodi.

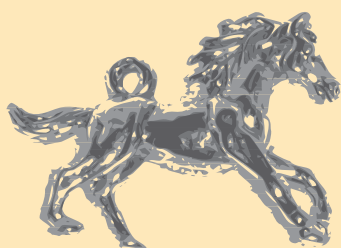


Conten que una vegada, una jove pobletana li va donar a tastar el Rei de Catalunya i Aragó. Complagut pel seu sabor, va preguntar, "Que és això?" I la jove va respondre, "És llet de xufa" (nom original), a la qual cosa el Rei va rectificar dient, "Això no és llet, això és OR, XATA!" (Açò no és llet, açò és or, guapa!).

Els ingredients d'una orxata són: xufes, sucre, aigua i canella de branca.

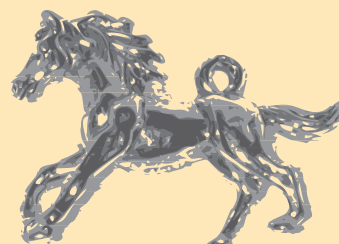
La xufa i el sucre s'utilitzen en la mateixa proporció mentre que la quantitat d'aigua que s'empra és cinc vegades la de xufa i sucre.

- 5.1. En una finca de cultiu de xufes ha arribat el moment de dur a terme la recol·lecció. Per a això s'utilitzaran dos tractors distints. Si estos tractors treballaren junts tardarien 8 dies a completar la recol·lecció. Però si haguera començat un tractor llaurant la mitat de la finca i hagueren continuat els dos junts llaurant la mitat restant, s'haguera fet la recol·lecció completa en 10 dies. Quants dies tardarien cada tractor a llaurar la finca sencera individualment?



5. ORXATA DE XUFA VALENCIANA

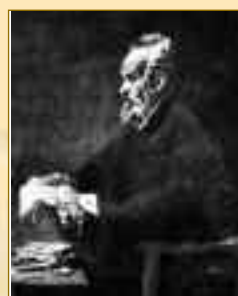
- 5.2. Les xufes arreplegades es porten a un magatzem perquè s'assequen durant un temps. Una vegada sec cal portar-les a una fàbrica per a l'elaboració d'orxata. El transport el realitzen dos camions. El segon camió comença a treballar una hora després que el primer. Tres hores després que el primer camió ha començat el treball queda encara per fer $\frac{9}{20}$ del treball. A l'acabar s'observa que cada camió ha transportat la mitat de la quantitat. Quantes hores tardaria cada un a fer el treball individualment?
- 5.3. El propietari de la finca després de realitzar càlculs, advertix que l'augment en la producció en la finca comparada amb la de l'any anterior és del 5 per 100 durant el primer any i del 8 per 100 durant el segon. Quin serà este percentatge d'augment en el tercer any perquè l'augment mitjà anual de la producció durant tres anys siga igual al 10%?
- 5.4. En la fàbrica on es produïx l'orxata tenen dos depòsits que contenen una mescla d'aigua i xufa. En el primer depòsit la xufa i l'aigua estan en la relació 2:11 i en l'altre en la relació 3:7. Quina quantitat s'ha de prendre en cada depòsit si volem obtindre 100 litres d'una mescla en què la proporció xufa-aigua siga d'1 a 5?



6. RAMÓN LLULL I LA COMBINATÒRIA

Ramón Llull va nèixer a Mallorca en 1235 i va morir a Tunis en 1316, casat i amb fills, va ser un home que tenia totes les comoditats possibles, era ric, culte i ocupava càrrecs importants; al voltant dels 30 anys va decidir dedicar-se radicalment a la predicació de la "paraula de Déu", sobretot en el món islàmic. Va fer nombrosos estudis teològics i filosòfics, va aprendre àrab per a poder predicar a "els infidels" i inclús va escriure llibres en esta llengua.

Tots els seus estudis i obres tenien l'objectiu d'explicar i demostrar la coherència de la creació, la grandesa de Déu,... En este sentit es va introduir també en les matemàtiques: la lògica simbòlica té un paper molt important en la seua obra "*Arbre de Ciència*" (una veritable enciclopèdia), o el pensament combinatori, que va exercir una gran influència sobre matemàtics posteriors (com Leibnitz). En la seua obra "*Ars Combinatòria*" apareix per primera vegada la denominació de combinatòria que hui s'usa.



Va tindre una vida molt agitada, va estar empresonat, va fer molts viatges, va publicar nombroses obres, inclús una antiga tradició diu que va morir lapidat (apedregat) a Tunis per predicar el cristianisme.

Fem un breu recordatori sobre els nombres combinatoris:

El nombre de combinacions ordinàries de n elements d'un conjunt amb m elements ($m > n$) es designa per $C_{m,n}$ i és igual a:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

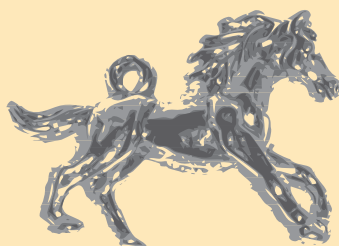
Exemple: Quants triangles es poden formar amb els vèrtexs d'un cub?

Atés que en un cub els huit vèrtexs estan disposats de tal manera que no hi ha tres d'ells alineats, podem formar tants triangles com a subconjunt de tres elements es puguen extraure d'un conjunt de huit. És a dir el nombre de triangles que es poden formar amb els vèrtexs d'un cub és igual a:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

El nombre de combinacions amb repetició de n elements d'un conjunt amb m elements es designa per $CR_{m,n}$ i és igual a:

$$C_{m+n-1,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$



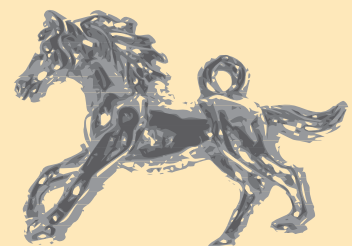
6. RAMÓN LLULL I LA COMBINATÒRIA

Exemple: Un iaio, pensant en els regals que ha de fer als seus néts, prepara bosses contenint monedes de 0,2; 0,5; 1 i 2 euros amb la condició que cada bossa continga exactament 20 monedes. Quantes bosses distintes, atenent a la composició, pot preparar?

Evidentment cada bossa ha de contindre elements repetits, no diferenciant-se les bosses per l'orde que ocupen les monedes en elles; després, es tracta de combinacions amb repetició:

$$CR_{4,20} = \frac{(4 + 20 - 1)!}{20!(4 - 1)!} = \frac{23!}{20! \cdot 3!} = 1.771$$

- 6.1. Disposem de 8 punts de tal manera que no estan alineats tres a tres. Es demana:
 - a) Quantes rectes determinen?
 - b) Quants triangles determinen?
- 6.2. Quin és el nombre de diagonals d'un polígon convex de 20 costats?
- 6.3. Es té 10 punts en un pla, 4 d'ells estan en línia recta i no hi ha un altre subconjunt de més de dos alineats. Trobar el nombre de triangles que s'obtenen unint estos punts de totes les maneres possibles.
- 6.4. Disposem de set colors. De quantes maneres pot pintar-se un tetraedre regular, no mesclant colors ni podent utilitzar el mateix color per a dos cares simultàniament?
- 6.5. Quantes fitxes té el joc del dòmino?
- 6.6. De quantes maneres podem repartir a 10 alumnes en dos grups de cinc membres cada un?
- 6.7. De totes les formes que podem col·locar sis boles indistingibles en quatre urnes numerades?
- 6.8. Es disposa de 10 signes + i 6 -. Quantes alineacions poden fer-se, amb tots els signes, de manera que mai dos signes - estiguen consecutius?
- 6.9. Quantes solucions naturals té l'equació del pla:
 $x + y + z = 6$?
- 6.10. Ma mare prepara entrepans consistents en una truita francesa que pot estar acompanyada amb algun, cap o amb tots els ingredients següents: Llonganissa, botifarra, formatge, ceba, maionesa, tomaca i cogombrets. Quants tipus d'entrepans distints pot preparar ma mare?



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPI D'INDUCCIÓ

Abu'l Hasn Ibn Ali **Al Qalasadi** va ser un matemàtic espanyol que va nèixer en Basa (Granada) en 1412 on va viure fins a ser capturat pels cristians, va morir en Beja (Tunis) en 1482.

Al Qalasadi va escriure diversos llibres entre els que destaquen els d'aritmètica i àlgebra. Va calcular sumes de quadrats i cubs de nombres naturals.

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

Va deduir les identitats següents:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

La veracitat d'estes identitats es pot provar utilitzant el "Principi d'inducció matemàtica", que és una tècnica molt utilitzada en matemàtiques per a demostrar la validesa d'algunes identitats en què intervé una variable sencera positiva n .

Vegem que consistix este principi:

Siga $S(n)$ una proposició matemàtica dependent de n (nombre enter positiu), per a la qual es té que:

- (1) $S(1)$ és verdadera; és a dir, 1 satisfà la proposició.
- (2) Per a tot K pertanyent als nombres enters positius, si $S(k)$ és verdadera també ho és $S(k+1)$.

En esta situació, la proposició $S(n)$ és verdadera per a tot n pertanyent als sencers positius.

- la condició (1) s'anomena base d'inducció.
- la hipòtesi "si $S(k)$ és verdadera" s'anomena hipòtesi d'inducció.
- la condició (2) s'anomena pas inductiu.

Vegem un exemple:

Demostrar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2$, per a tot $n \in \mathbb{Z}^+$

Siga $S(n)$ la proposició: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2$

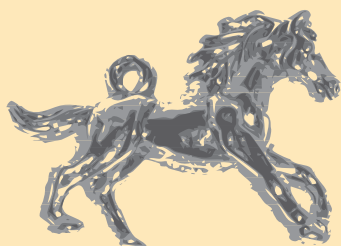
- (1) $S(1)$ és verdadera, atès que $1 = 1^2$
- (2) $S(2)$ és verdadera, atès que $1+3 = 2^2$

Siga $k \in \mathbb{Z}^+$, arbitrari tal que $S(k)$ és verdadera. És a dir:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \text{ (hipòtesi d'inducció)}$$

vegem si $S(k+1)$ és verdadera. Per a això haurem de provar que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$$



7. AL-QALASADI: EL PRINCIPI D'INDUCCIÓ

En efecte:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2(k+1)-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) =$$

$$= (1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)) + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Per tant: $S(k+1)$ és verdadera.

En virtut del principi d'inducció es té que la proposició $S(n)$ és verdadera per a tot sencer positiu n .

7.1. Utilitzant el principi d'inducció demostra que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Siga $S(n)$ la proposició: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- (1) $S(1)$ és verdadera, atès que: $1^2 = \dots$
- (2) Siga K un nombre arbitrari pertanyent als sencers positius, tal que $S(k)$ és verdadera. És a dir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \dots \quad (\text{hipòtesis de inducció})$$

Vegem si $S(k+1)$ és verdadera. Per a això hem de provar que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

En efecte:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 =$$

$$= (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Realitzant la suma i traient factor comú $(k+1)$ s'arriba a:

$$\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

Si a continuació factoritzes el polinomi $(2k^2+7k+6)$ s'obté que $S(k+1)$ és verdadera i per tant la proposició també.

7.2. Demostra utilitzant el mètode d'inducció matemàtica la identitat:

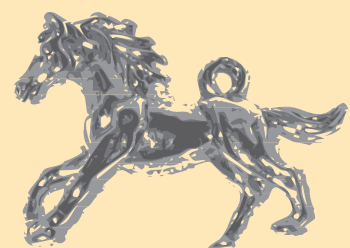
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

7.3. Demostra pel mètode d'inducció matemàtica la identitat:

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{n}{4(n+4)}$$

7.4. Demostra pel mètode d'inducció matemàtica la identitat:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$



8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

El regnat d'Alfons XII (1252 -1284) va ser un període d'intensa activitat científica i literària dirigida pel mateix rei. Va tindre lloc un procés d'assimilació del coneixement islàmic i de recuperació de les obres gregues creant-se una cultura en què intervenen pensadors musulmans, cristians i jueus. Este procés es va desenvolupar en especial en l'escola de traductors de Toledo, on es van traduir les principals obres filosòfiques i matemàtiques, com l'Àlgebra d'Al-Jwaritzmi, el Cànon d'Avicenna, Els elements d'Euclides i també el Talmud.



El **Talmud** és un document de dos mil anys d'antiguitat que forma la base de la religió jueva així com també de la llei criminal i civil. El Talmud està format per dos tipus d'ensenyances: el Mishna i el Gemara. El Mishna arreplega declaracions curtes i molt concises de la llei i el Gemara arreplega comentaris i explicacions sobre el Mishna.

Moshé Ben Simi (1135 - 1204), també conegut com **Maimónides**, va escriure un famós comentari sobre el Mishná. Va ser obligat a allunyar-se de la seua Espanya natal per les persecucions i es va assentar a Egipte, on va treballar en una important recopilació de les lleis del Talmud.



En el Talmud apareixen exemples d'un tipus de problemes que anomenem de fallida i que es produeixen quan una persona o empresa no disposa de suficients fons per a pagar als seus creditors i hi ha què decidir com efectuar el repartiment entre els creditors.

En notació matemàtica un **problema de fallida** s'expressa com un parell (E, r) on $E \in \mathbb{R}^+$ són els fons per a repartir i $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ és el que demanen cada un dels n creditors.

Se suposa que el que demanen els creditors és superior al que hi ha per a repartir (sinó no hi hauria problema), és a dir:

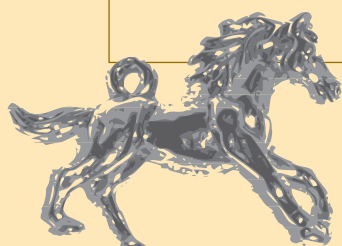
$$\sum_{i=1}^n r_i \geq E$$

Veurem distintes formes d'efectuar el repartiment:

Regla Proporcional

Repartix el capital proporcionalment a les demandes dels creditors, la definim $P(E, r)$, de manera que a cada creditor li correspon:

$$P_i(E, r) = \frac{r_i}{\sum r_i} \cdot E \quad \text{on} \quad \sum r_i > 0$$



8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

Exemple:

Imagina que una empresa hi ha fallit i hi ha tres creditors que reclamen $r_1=50$ $r_2=150$ y $r_3=200$ però el patrimoni hi ha repartir és només de 300 euros quina part li correspon a cada un?

$$p_1 = \frac{50}{400} \cdot 300 = 37'5$$

$$p_2 = \frac{150}{400} \cdot 300 = 112'5$$

$$p_3 = \frac{200}{400} \cdot 300 = 150$$

El següent exemple apareix en el Talmud:

- 8.1. Un home mor deixant tres dones amb un contracte de casament cada una on s'especifica que en cas de mort haurien de rebre 100, 200 i 300 respectivament. Depenent de quin és el patrimoni a repartir, el Talmud recomana les solucions següents:

Si el patrimoni a repartir és de 300 el repartiment és proporcional.

Esbrina que part li correspon a cada una de les esposes en este cas.

Regla Proporcional dels Drets Truncats

És pareguda a l'anterior, però repartix proporcionalment als drets truncats pel patrimoni:

$$PT_i(E, r) = \frac{r_i^t}{\sum r_i^t} \cdot E$$

$$r_i^t = \min(r_i, E) \text{ on } \sum r_i > 0$$

A cada creditor li assigna per a calcular les proporcions el que demanda si és menor que el patrimoni i si és major li assigna el patrimoni.

Imagina que vols repartir un patrimoni de 200 entre tres creditors que demanen 50, 100 i 300.

$$r_1^t = \min(50, 200) = 50$$

$$r_2^t = \min(100, 200) = 100$$

$$r_3^t = \min(300, 200) = 200$$

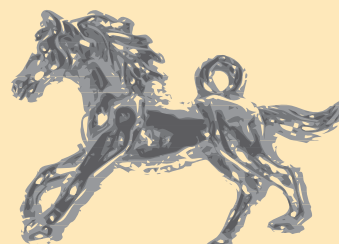
Després el repartiment serà de:

$$50 + 100 + 200 = 350$$

$$PT_1 = \frac{50}{350} \cdot 200$$

$$PT_2 = \frac{100}{350} \cdot 200$$

$$PT_3 = \frac{200}{350} \cdot 200$$



8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

Regla Igualitària

Repartix el patrimoni en parts iguals: $I(E, r) = \frac{E}{n}$ on n és el nombre de creditors.

8.2. El Talmud recomana la regla igualitària en el problema 8.1. quan el patrimoni és de 100, el Talmud. Calcula quant li correspon en este cas a cada una de les dones.

Regla Igualitària Restringida

Repartix el patrimoni en parts iguals, però evitant que algun dels creditors reba més del que li correspon:

$$IR_i(E, r) = \min(r_i, \lambda) \text{ on } \lambda \text{ és tal que } \sum \min(r_i, \lambda) = E$$

Esta regla va ser defesa per molts autors, entre els que es troba Maimónides. Suposem que volem repartir un patrimoni de 90 entre tres creditors que demanen 20, 100, i 200. Si ho repartim igualitàriament cada un percebria $\frac{90}{3} = 30$, prendríem $\lambda = 30$ però d'esta manera el primer creditor rep més del que demana, que és 20.

Per a evitar-ho, si ocorre açò, el creditor es porta el que demana i tornem a calcular λ repartint el que tenim, una vegada descomptat el que correspon al primer, entre els altres dos.

$$\begin{array}{l} 90 - 20 = 70; \quad 70/2 = 35; \quad \lambda = 35 \\ \min(20, \lambda) + \min(100, \lambda) + \min(200, \lambda) = 90 \\ \quad 20 \qquad \qquad 35 \qquad \qquad 35 \end{array}$$

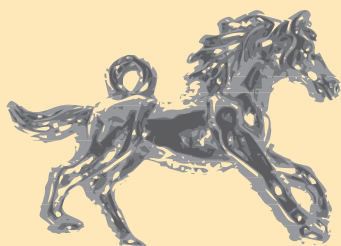
Rep cada un: $IR_1 = 20$ $IR_2 = 35$ $IR_3 = 35$

Regla Igualitària Restringida de Pèrdues

És la dual de l'anterior, repartix igualitàriament les pèrdues, però evitant que ningú perda més del que demana:

$$IRP_i(E, r) = \max(0, r_i - \lambda) \text{ on } \lambda \text{ és tal que } \sum \max(0, r_i - \lambda) = E$$

Suposarem que hem de repartir per este procediment un patrimoni de 200, quan els creditors reclamen 100, 200 i 300 respectivament.



8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

Per a esbrinar λ dividim les pèrdues entre els 3: $(\sum p_i - E)/3$

$100+200+300=600$ són les pèrdues dels tres junts.

$600-200=400$ (li restem 200 que és el que els van a pagar).

Possible $\lambda = 400/3=133$.

Però el primer creditor no pot perdre més del que demana, que és 100, després ell perdrà 100.

Recalculem de nou el possible λ , perquè l'anterior no ens val:

$500-200=300$; $300/2=150$; Possible $\lambda=150$

El segon i el tercer perdran 150 cada u. Calcularem quant guanya cada un:

$$\begin{array}{rccccccc} \max(0; 100 - \lambda) & + & \max(0; 200 - \lambda) & + & \max(0; 300 - \lambda) & = & 200 \\ 0 & + & 50 & + & 150 & = & 200 \end{array}$$

El primer gana 0, el segon 50 i el tercer 150.

- 8.3.** Un senyor guanya a la loteria i repartirà el dècim entre els seus amics que reclamen 50, 150 i 200 €, però ha decidit regalar quasi tot el premi per a una obra benèfica i només li queden 100 €. Si fa el repartiment segons La regla igualitària restringida de pèrdues, què li correspon a cada un?

Regla del Talmud

Esta regla és pareguda a una que apareixia en el Talmud:

Per a repartir cal fer el següent:

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} \geq E \quad t_i = \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) = E$$

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} < E \quad \text{entonces } t_i = r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \left(r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) \right) = E$$



8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

Cas primer:

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} \geq E \quad t_i = \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) = E$$

Per exemple, tenim:

Pensarem que hem de repartir un patrimoni de 200 entre tres creditors que demanen 100, 150 i 300.

$$r_1 = 100$$

$$r_2 = 150$$

$$r_3 = 300$$

i la quantitat a repartir és $E=200$

La primera cosa que fem és sumar el que demanen entre els 3, i ho dividim entre 2:

$$\frac{100 + 150 + 300}{2} = 275 > 200$$

L'ideal seria que cada un rebera almenys la mitat del que demana, però no n'hi ha prou, llavors es repartix de manera que tots reben almenys la mitat del que demana el menor i eixe no rep més. Després es repartix l'altres fins que tots tinguen la mitat del que demana el segon etc.

$$t_1 = \min(50; \lambda) \quad t_2 = \min(75; \lambda) \quad t_3 = \min(150; \lambda)$$

Si repartim per igual el que hi ha entre els tres $\frac{200}{3} = 66,6 = \lambda$

Al primer li correspondria $\min(50; 66,6) = 50$ perquè no pot guanyar més del que demana, llavors li donem 50 i recalculem el λ .

Repartim el que queda entre els altres dos:

$200 - 50 = 150$; $150/2 = 75 = \lambda$ i el segon i tercer guanyen 75.

$$t_1 = 50$$

$$t_2 = 75$$

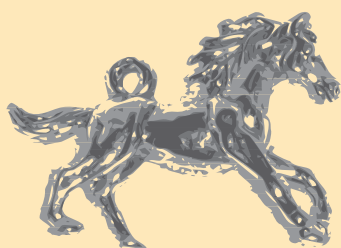
$$t_3 = 75$$

Ens estem assegurant que tots reben la mitat del que els correspon. Repartixen fins que tots tenen la mitat del que demana el primer, després els altres dos repartixen fins que tinguen la mitat del que demana el segon, etc.

Cas segon:

$$\text{Si } \frac{\sum r_i}{2} < E \quad \text{entonces } t_i = r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right)$$

$$\lambda \text{ tal que } \sum \left(r_i - \min\left(\frac{r_i}{2}, \lambda\right) \right) = E$$



8. ELS REPARTIMENTS I EL TALMUD

Per exemple, tenim:

$$E=290 \quad y \quad r_1=50 \quad r_2=100 \quad r_3=300$$

$$\frac{\sum r_i}{2} = \frac{450}{2} < 290$$

Cada un pot guanyar la mitat del que demana i la resta s'ho poden repartir (repartint les pèrdues).

$$T_1 = 50 - \min(25, \lambda)$$

$$T_2 = 100 - \min(50, \lambda)$$

$$T_3 = 300 - \min(150, \lambda)$$

A cada un li llevem com a màxim la mitat del que demana, després garantim que rep almenys l'altra mitat del que demana. p_i és la pèrdua de l'individu i .

$\sum p_i - E$ és el que perden entre els tres

$$50 + 100 + 300 = 450 \quad 450 - 290 = 160$$

Si es repartixen les pèrdues per igual, cada un perd $\frac{160}{3} \approx 53$, després $\lambda = 53$ i el primer i el segon perdrien més del que deuen. Llavors el primer perd 25 i el segon 50 i el que queda li correspon al tercer.

$$T_1 = 50 - \min(25, \lambda) = 25$$

$$T_2 = 100 - \min(50, \lambda) = 50$$

Com els dos primers es queden amb la mitat del que els correspon, recalculem

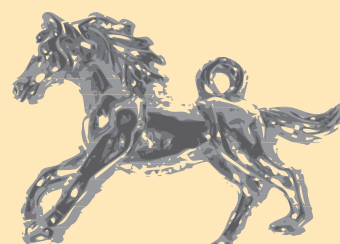
$$\lambda = 160 - 25 - 50 = 85$$

$$T_3 = 300 - \min(150, \lambda) = 300 - 85 = 215$$

Si encara quedara quelcom que repartir, ho repartirien entre tots a parts iguals.

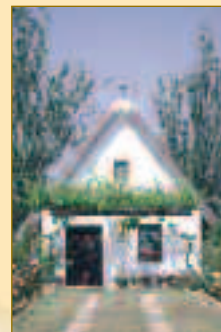
8.4. El problema del Talmud 8.1. quan el patrimoni és de 200 ho repartix d'esta manera. Intenta calcular-ho.

El problema del Talmud està proposat fa 2.000 anys, però en l'actualitat els repartiments continuen sent fonamentals. En la unió europea, la producció làctia és una de les activitats econòmiques més importants, la producció no és uniforme en tots els països i a fi d'estabilitzar el mercat s'utilitza el sistema de quotes làcties. Es fixa la quantitat màxima de producció de la UE i basant-se en eixa quantitat limita la producció de cada estat. El problema d'assignar una quantitat de producció a cada país es modelitza per mitjà d'este tipus de problemes de fallida.



9. LA BARRACA VALENCIANA

La feraç horta valenciana, que s'estén al llarg de la costa, des de Carcaixent fins a Sagunt, té zones, com la de L'Albufera, de característiques molt acusades. La vivenda rural és la barraca, i en ella podem distingir els tipus següents: la barraca d'hortolans, en l'horta pròpiament dita; la de pescadors, en la platja, i en L'Albufera les dos modalitats.



El clima de València i la fertilitat de les seues terres permeten diverses collites a l'any, amb un sistema d'explotació intensiva que precisa una constant atenció. Este és el motiu que l'hortolà construísca la seua vivenda al peu de la seua parcel·la, emprant, quasi únicament, amb sentit de la màxima economia, els materials que brinda la naturalesa: canyes, fang, juncs i canyissos.

La barraca de l'horta respon a un tipus molt definit, que a penes ha patit variació amb el pas del temps. És de planta rectangular, d'uns $9 \times 5,50$ m., i coberta a dos aigües amb cavallet perpendicular a la fatxada —quasi sempre orientada al migdia—, que està en un dels costats menors.

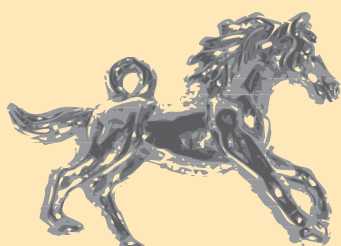
La distribució és sempre pareguda: una porta, situada a un costat de la fatxada, dóna accés a un ampli pas, que recorre tota la longitud de la barraca i acaba amb una altra porta en la fatxada oposada, per a facilitar la circulació d'aire. Este corredor servix de cuina, estança i magatzem d'apers.

En l'altra crugia es distribuïxen els dormitoris, generalment tres. Al porxe o andana, que antigament es destinava a la cria de cucs de seda, es puja per una escala de mà.

Les parets, d'uns 2,50 m. d'altura, es fan amb atovons, anomenats gasons, que es col·loquen en asta sencera o en mitja asta, segons l'economia que es perseguisca.

El carener de la coberta es remata amb una creu de fusta en cada extrem. D'Esta rematada en creu s'ha escrit que, en el segle XVI, pregonava la qualitat de cristians vells dels habitants de la barraca, enfront de les habitades per moriscos. Però no hi ha proves suficients per a mantindre esta teoria i, segons pareix, es tracta simplement d'un símbol piadós.

9.1. En els afores de la ciutat on viu Pedro, hi ha una barraca molt antiga. Segons es diu, la teulada d'esta barraca es va construir de tal manera que l'aigua roman-guera en ella el menor temps possible. Calcula la inclinació que té la teulada.



9. LA BARRACA VALENCIANA

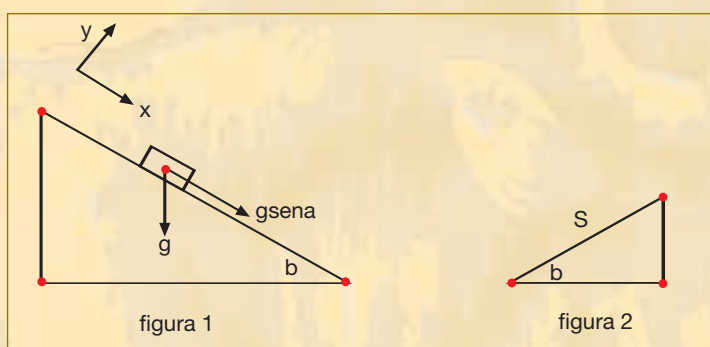
Nota:

L'equació que expressa la distància recorreguda per un cos que es mou amb moviment uniformement accelerat és:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \text{ on:}$$

- s_0 : posició inicial del cos
- v_0 : velocitat inicial del cos
- g : acceleració gravitatòria

La figura t'ajudarà a resoldre el problema.

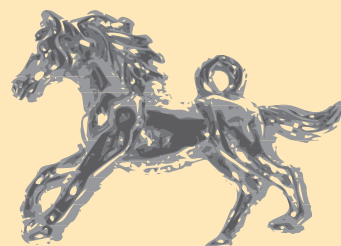


- 9.2. La següent taula mostra les temperatures mitjanes dins de la barraca anterior al llarg del primer semestre d'enguany:

	E	F	M	A	M	J
Temperatura MÀX. (x)	16	17	19	19	21	25
Temperatura MÍN. (y)	7	10	12	13	15	19

- Calcula el coeficient de correlació lineal. Quin tipus de relació estadística existeix entre les variables?
- Determina la recta de regressió de y sobre x .
- Per a una temperatura màxima de 22°C . Quina temperatura mínima cal esperar? i per a una temperatura de 40°C ?
- Per a una temperatura mínima de 15°C . Quina temperatura màxima cal esperar?

- 9.3. Damunt del carener de la barraca anterior, hi ha una creu de fusta la grandària de la qual es desitja conèixer. Per a això s'ha llançat una visual a la base de la creu des d'una certa distància, formant esta visual un angle de 60° amb l'horitzontal. A continuació s'ha llançat una altra visual a l'extrem superior de la creu, sent $61,5^\circ$ l'angle que esta visual forma amb l'horitzontal. Sabent que el carener es troba a una altura de 5 m. respecte del sòl. Quina és la longitud de la creu?



10. LA CLEPSIDRA: RELLOTGE D'AIGUA

Un dels invents que més sorprenia les gents que visitaven Toledo era el de dos clepsidres (rellotges d'aigua) construïdes per l'astrònom **Azarquiel** a les vores del Tajo; estes clepsidres eren dos estanys que s'omplien coincidint amb el pleniluni i es buidaven amb la lluna nova, de manera que els musulmans de Toledo coneixien per elles el dia del mes (els musulmans es guiaven per mesos lunars) i l'hora. Els poetes les van cantar i algun il·lustre visitant les va qualificar de «el més meravellós i sorprenent que hi ha a Toledo i que no té igual en el món habitat». L'any **1133**, un rei de Castella va voler conèixer els secrets de l'artifici i un astrònom jueu es va oferir a desmuntar una de les clepsidres i a millorar-la, però va fracassar en el seu intent i la clepsidra no va tornar a funcionar. L'altra va desaparèixer més tard, i d'ella no queda rastre, com no ha quedat de molts altres artificis construïts pels enginyers savis àrabs.



En el cas d'un depòsit cilíndric la disminució de l'altura de l'aigua no és uniforme en el temps. A causa de la llei de Torricelli descendix més ràpid quan el depòsit està ple i més lentament quan està quasi buit d'acord amb la fórmula:

$$t = \frac{1}{k} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H})$$

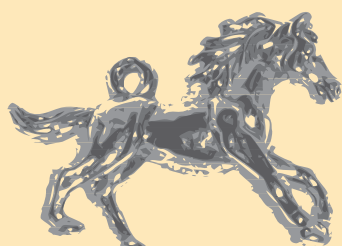
Per a aconseguir que l'aigua disminuísca la seua altura intervals iguals en temps iguals hem de canviar la forma del depòsit. Així fent unes senzilles marques en la paret del mateix aconseguirem que es pugui utilitzar com "rellotge d'aigua" o "clepsidra".

La forma del depòsit és l'obtinguda al girar la corba $y = Ax^4$ al voltant de l'eix d'ordenades.

10.1. Representa la funció per a distints valors del paràmetre A i comenta els resultats.

10.2. La funció que dóna el volum en funció de l'altura és:

$VH_{clepsidra} = \frac{2\pi}{3\sqrt{A}} \sqrt[3]{}$ y la del cilindre de radi igual al de la secció màxima de la "clepsidra" és: $V_{cilindro} = \pi \cdot R^2 \cdot H$. Tin en compte que en la clepsidra $H = A \cdot R^4$. Calcula que percentatge d'aigua pot emmagatzemar la "clepsidra" respecte del cilindre.



10. LA CLEPSIDRA: RELLOTGE D'AIGUA

- 10.3. Una "clepsidra" possible és aquella que tinga una altura de 50 cm. i que el seu constant siga $A=0,0002$. La clepsidra s'ompli fins als 48 cm. per a evitar que desborde. Volem que servisca per a mesurar la duració d'un dia.

Construïx en un full de càlcul la taula que arreplegue cada dos centímetres: el radi de la clepsidra, el volum de la clepsidra, el volum del cilindre associat, la relació entre volums i la variació de volum en la clepsidra cada dos centímetres d'altura a l'anar buidant-se.

- 10.4. La propietat característica d'esta clepsidra és que el temps transcorregut és directament proporcional a la pèrdua d'altura del depòsit: $t=k(H_0-H)$.

Determina el valor de "k" perquè cada 2 cm. d'altura supose 1 h. de temps. Representa la funció.

- 10.5. El volum obtingut al girar un tram de corba $y=f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$ al voltant de l'eix x s'obté per mitjà del càlcul integral: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

a) Considera la corba de la clepsidra "tombada". Per a això obtén la seua funció recíproca.

b) Aplica esta fórmula per a obtindre el volum de la clepsidra en funció de l'altura d'aigua.

