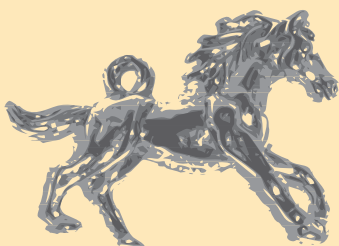


IBERIA

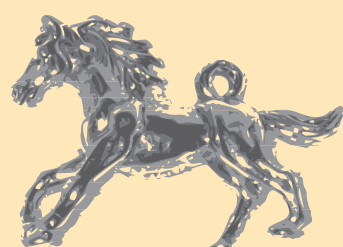
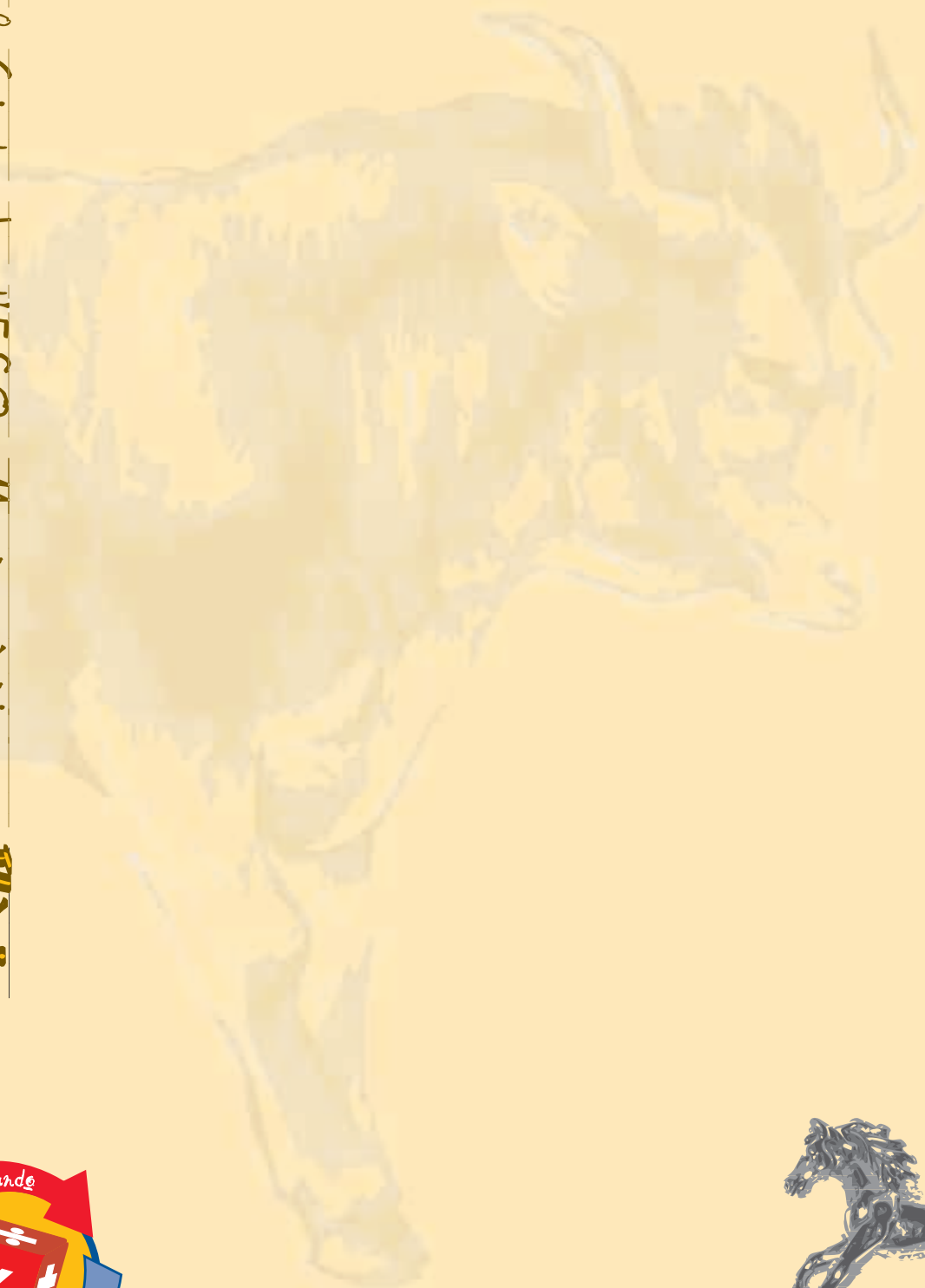
FITXES DE TREBALL. ÍNDEX DE CONTINGUTS

ACTIVITAT	BLOC	CONTINGUTS
1. Juan Martínez Silíceo: Repartiments	-Aritmètica i Àlgebra	-Problemes de repartiment
2. La Geometria: Savasorda	-Geometria i Àlgebra	-Equacions i trigonometria
3. L'Àlgebra: Ben Ezra	-Àlgebra i Geometria	-Equacions lineals
4. Mosaics de l'Alhambra	-Aritmètica i Geometria	-Simetries i Teorema de Pitàgores
5. Un joc medieval: el Morris	-Resolució de problemes	-Jocs d'estratègia
6. El número cordovés	-Geometria i Àlgebra	-Triangles, equacions i trigonometria
7. Monedes en l'Edat Mitjana	-Aritmètica i Àlgebra	-Problemes de mescles
8. L'Aritmètica: Gaspar Nicolás	-Aritmètica i Àlgebra	-Operacions numèriques i equacions
9. La barraca valenciana	-Aritmètica i Àlgebra	-Operacions numèriques i equacions
10. La clepsidra: rellotge d'aigua	-Anàlisi de funcions	-Funcions recíproques

2^o Cicle de l'ESO. Matemàtiques, **Ibèria**



2º Cicle de l'ESO. Matemàtiques, **Idèmia**



1. JUAN MARTÍNEZ SILICI: REPARTIMENTS

Al llarg de la Història apareix innumerables vegades el problema de com repartir una quantitat entre diverses persones, situació que es donava sovint en el repartiment de les herències i també amb els creditors, quan la quantitat que reclamaven era superior al que el deutor podia pagar. Com s'efectuava llavors el repartiment? Veurem distints exemples.

Juan Martínez Silici (1477-1557) va ser uns dels matemàtics espanyols que en la primera mitat del segle XVI van ensenyar matemàtiques a París. Va estudiar filosofia, dialèctica, matemàtiques i va ser professor de la Universitat de Salamanca. En 1534 l'emperador Carlos V el va anomenar mestre del seu fill Felip II que llavors tenia 6 anys i posteriorment va obtenir el nomenament de bisbe de Cartagena i Cardenal de Toledo.



Va escriure diverses obres, la més important d'elles es titula *Ars Arithmetica* i va ser publicada en París en 1514, va tindre un gran èxit i es van realitzar diverses edicions, una d'elles a València. En este llibre, en un tractat dedicat a la regla de tres apareixen dos problemes que et mostrem a continuació, intenta resoldre'ls, en les solucions trobaràs com els va resoldre Silici.

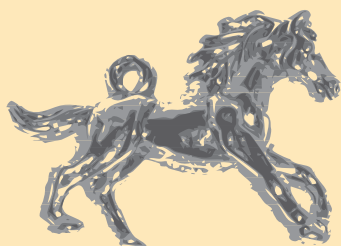
- 1.1. Un home malalt, que tenia a la seua esposa embarassada, i amb un capital de 2.000 escuts, va deixar este testament: si la meua dona dóna a llum un xiquet, per a ell són els tres quintos dels meus béns, per a la meua dona un quint i per a l'església la resta. Però si dóna a llum una xiqueta, esta rebrà dos quintos, la meua dona altres dos quintos i l'església la resta. A l'arribar el moment, la dona va donar a llum bessons, un xiquet i una xiqueta. Pregunta: Com es distribuïran els béns?
- 1.2. Cal dividir mil francs entre tres socis, el primer tindrà el doble que el segon i el segon el triple que el tercer. Pregunta: Quant tindrà cada un?

El següent exemple va ser enunciat pel rabí Abraham Ibn Ezra l'any 1140 a.C.

- 1.3. Un home mor deixant quatre fills i quatre herències. Assigna al primer fill la totalitat del patrimoni, al segon la mitat, al tercer una tercera part i al quart una quarta part. Evidentment no n'hi ha prou per a satisfer els drets dels quatre fills. Com es realitzarà el repartiment?

Repartiment Proporcional

Nosaltres utilitzem per a resoldre estos problemes el **Repartiment Proporcional**, segons el quin a cada un dels hereus li correspon una fracció del total a repartir que té com a numerador la part que ha de correspondre a eixa persona i com a denominador la suma de totes les quantitats reclamades pels hereus.

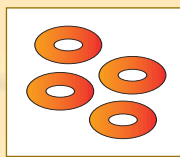


1. JUAN MARTÍNEZ SILICI: REPARTIMENTS

Però no hi ha una única forma de fer repartiments, nosaltres treballem amb repartiments directament o inversament proporcionals, però un autor anomenat neill proposa els mètodes següents:

Repartiment proporcional amb els drets truncats

És una versió del repartiment proporcional però amb una diferència: si algun dels hereus reclama una quantitat major que la quantitat a repartir, se li assigna per al repartiment la quantitat a repartir.



Anem a explicar-ho amb un exemple:

Pedro, Juan i Marta han guanyat en un concurs 3, 6 i 20 rosquilles cada un, però quan els van a entregar el premi es donen quanta que només tenen 18 rosquilles en total. Com les repartixen?

Solució:

A cada un se li assigna per al repartiment el que siga més xicotet entre el que li correspon o el total.

Si anomenem E al total i r_i al que li correspon a cada un seria: mínim (r_i , E).

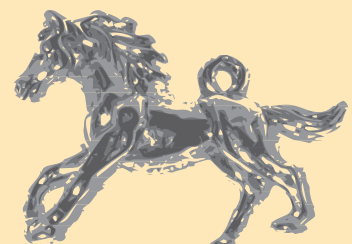
- A Pedro, entre 3 i 18 li corresponen 3.
- A Juan, entre 6 i 18 li correspon 6.
- A Marta, entre 20 i 18 li correspondran 18

Ara fem el repartiment com abans:

- Pedro: $\frac{3}{3+6+18} \cdot 18 = \frac{3}{27} \cdot 18 = 2$
- Juan: $\frac{6}{27} \cdot 18 = 4$
- Marta: $\frac{18}{27} \cdot 18 = 12$

Hem repartit les 18 rosquilles: $2+4+12 = 18$.

- 1.4. Et pareix més just este repartiment o el repartiment proporcional? Quantes rosquilles li correspondrien a cada un dels amics si hagueren fet un repartiment proporcional?



1. JUAN MARTÍNEZ SILICI: REPARTIMENTS

Regla Igualitària

És una altra forma de repartir en la que es repartix a **parts iguals** el patrimoni entre tots. Açò s'expressa matemàticament $\frac{E}{n}$ on E és el total a repartir i n és el nombre de persones que participen en el repartiment.

- 1.5. En l'exemple d'abans Quantes rosquilles li corresponen a cada xiquet si fem este repartiment?

Esta regla, encara que s'anomena igualitària pareix poc justa Creus que Pedro, Juan i Marta estarien d'acord en este repartiment?

Regla Igualitària Restringida

Esta regla repartix també equitativament però evita el problema que algú puga rebre més del que li correspon, com li ocorria a Pedro, que rebia 6 rosquilles quan li corresponien 3.

Per a explicar-ho suposem que a Pedro, Juan i Marta els ha correspost en una rifa 20, 100 i 200 cucs de seda respectivament però quan faran el repartiment s'han escapat uns quants i només hi ha per a repartir 90.

Si el repartiment fóra igualitari, a cada un li correspondrien $\frac{90}{3} = 30$, però Pedro tindria més dels 20 que li han tocat.

Així que assignem a cada un el mínim entre els que li toquen i 30: $\text{Min}(r_i, 30)$.

A Pedro li correspondrien 20, a Juan 30 i a Marta 30.

Restem al total els 20 de Pedro i queden $90 - 20 = 70$ que els repartim entre els altres dos. $\frac{70}{2} = 35$

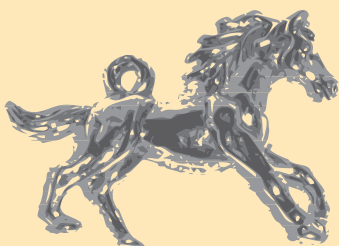
Així, Pedro rep 20, i Juan i Marta 35 cada u.

- 1.6. Imagina ara que s'han de repartir 90 pomes però a Pedro li corresponen 20, a Juan 25 i a Marta 100. Quantes pomes li corresponen a cada un fent el repartiment anterior?

Repartiments Inversament Proporcionals

També podem realitzar repartiments inversament proporcionals, intenta resoldre el problema següent:

- 1.7. Pedro, Juan i Marta han pujat a una tres palmeres i han aconseguit entre els tres 300 dàtils. Se'ls repartiran de manera que reba més dàtils el que té menys anys, és a dir, inversament proporcional a les seues edats. Si Pedro té 10 anys, Juan 15 i Marta 30, Quants dàtils li corresponen a cada un?



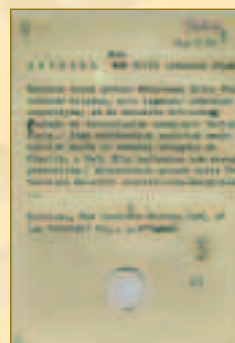
2. LA GEOMETRIA: SAVASORDA

Abraham bar Hiyya (1092-1177), va ser un matemàtic i astrònom jueu. També va ser conegut pel seu nom llatí **Savasorda**, que significa governador de ciutat. Va ser probablement educat en el Califat de Còrdova, però és a Barcelona on va escriure les seues obres originals en hebreu.

Coneixem dos obres amb contingut matemàtic:

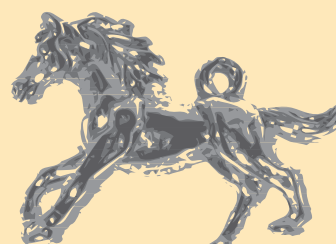
- *Yesodey hi ha u-Migdal ha_Emuna*, la primera enciclopèdia escrita en hebreu sobre matemàtica, astronomia, òptica i música.
- *Hibbur hi hi ha We-ha Tishboret* (Tractat de mesura i càlcul), escrit en 1116 i traduït al llatí en 1145 per Plató de Tivoli amb el nom *Liber embadorum*.

Este tractat tenia com a objectiu ajudar els jueus espanyols i francesos en el càlcul de mesures dels camps. Trobem algunes definicions, axiomes i teoremes d'Euclides. També es troba una justificació geomètrica d'una equació de segon grau.



Resoldràs diversos problemes del **Tractat de mesura i càlcul**:

- 2.1. Si de l'àrea d'un quadrat llevem la suma de dos dels seus costats, sobra 21. Quina és l'àrea del quadrat i quina la longitud de cada un dels costats iguals?
- 2.2. Donada una corda de longitud 6 en un cercle de diàmetre $10 + \frac{1}{2}$, descobrix la longitud de l'arc corresponent a la corda.
- 2.3. Descobrix la longitud d'una corda l'arc corresponent de la qual té una longitud de $5 + \frac{1}{2}$, en un cercle de diàmetre 33.
- 2.4. Si una corda de longitud 8, dista 2 d'una circumferència, descobrix el diàmetre del cercle.
- 2.5. En un rectangle la diagonal del qual és 20 i la longitud de la qual excedix en 2 a la seua amplària, descobrix la longitud, l'amplària i l'àrea.
- 2.6. Quina és la longitud del costat d'un rombe, si una diagonal és 16 i l'altra 12?



3. L'ÀLGEBRA: BEN EZRA

Rabbi Abraham ben Meir Ezra (1090-1167), va ser un jueu que va néixer, probablement a Toledo i va morir possiblement a Roma. Ezra es va dedicar inicialment a la poesia, però també té treballs sobre gramàtica, astrologia i matemàtiques.

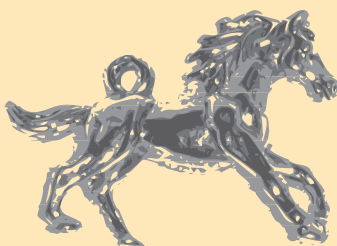
Coneixem diversos textos, escrits en hebreu, relacionats amb les matemàtiques:

- *Séfer hi ha* (El llibre de les unitats), on descriu els símbols hindús per a les xifres de l'1 al 9. Ezra utilitza les nou primeres lletres de l'alfabet hebreu:

א ב ג ד ה ו ז ח ט

Utilitzava el sistema decimal per als nombres enters i el sistema sexagesimal per a les fraccions.

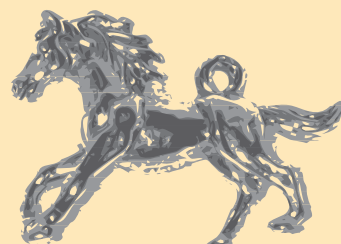
- *Séfer hi ha* (El llibre del número), on descriu el sistema decimal per als nombres enters. En este llibre utilitza el zero amb forma de circumferència i que designa con *gagal* (roda).
- *Líber augmenti et diminutionis vocatus numerari divinationis...* és probablement una traducció al llatí d'un llibre seu; també és atribuït al matemàtic àrab Ajjub al-Basri. El llibre conté diversos problemes on s'aplica la "regla de doble falsa posició" i està dividit en 7 parts: multiplicació, divisió, suma, diferència, fraccions, raons i arrels quadrades.



3. L'ÀLGEBRA: BEN EZRA

Resoldràs diversos problemes de Líber augmenti:

- 3.1. Capitulum de codem aliud: Un tresor és augmentat en una tercera part. Després una quarta part de la seua totalitat i afegida a la primera suma. La nova suma és 30. Quin era el tresor original?
- 3.2. Capitulum d'eodem aliud: Un tresor és augmentat en una tercera part i quatre dracmes. Després una quarta part del total és afegida a la primera suma. El resultat és quaranta.
- 3.3. Capitulum ejus aliud: Un tresor és augmentat quatre dracmes. Després la mitat del total i cinc dracmes és afegida a la primera suma. Després va ser encara augmentada la quarta part. El resultat va ser de setanta dracmes.
- 3.4. Capitulum d'eodem aliud: Si et diuen que un mercader té un certs diners i que duplica el seu diners i dóna dos dracmes. Torna a duplicar el seu diners i dóna quatre dracmes. Després torna a duplicar el seu diners i dóna huit dracmes i es queda sense res. Quants diners tenia inicialment?
- 3.5. Capitulum pomis (Capítol dels fruits): Un home entra en un camp de pomeres que té tres guardes i recol·lecta certa quantitat de pomes; troba el primer guarda i li dóna la mitat i dos pomes; al trobar el segon guarda li dóna la mitat del que li queda i dos pomes; per fi, al trobar al tercer li dóna la mitat del que encara li queda i dos pomes; llavors li queda una poma. Quantes pomes va recol·lectar?



MOSAICS DE L'ALHAMBRA

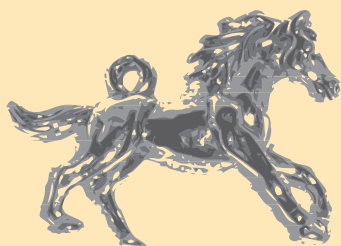
S'anomena mosaic a tot recobriment del pla per mitjà de peces anomenades tesseles que no poden superposar-se, ni poden deixar buits sense recobrir i en el que els angles que concorren en un vèrtex deuen sumar 360 graus. Hi ha moltes formes d'obtenir un mosaic. Els més senzills estan formats per un únic tipus de polígon regular, com el triangle equilàter, el quadrat o l'hexàgon regular.

També és possible aconseguir mosaics utilitzant com tesela algun polígon irregular, com a triangles, quadrilàters i inclús algun pentàgon equilàter però no equiangle.

Combinant dos o més polígons regulars poden obtenir's també mosaics, sempre que la distribució dels mateixos en cada vèrtex siga la mateixa. És a dir, podem obtenir figures formades per diversos polígons regulars que combinats convenientment junts forma una tesela, amb la que podrem recobrir el pla.

Una curiosa forma de construir mosaics vistosos i originals és per mitjà de transformacions de tesseles poligonals que es convertixen en formes abstractes, animals, fulles, etc. Els nous motius mantenen la propietat de continuar recobrint el pla, les figures s'obtenen retallant una o diverses parts del polígon base per a col·locar-les per mitjà de translacions o girs en un altre costat. Esta última tècnica, junt amb altres, va ser utilitzada en la construcció dels mosaics nassarites. La dinastia nassarita, descendent de **Yusuf ben Nazar**, va regnar a Granada des del segle XIII al XV. L'Alhambra i Granada en general van viure llavors una època d'esplendor que ha quedat reflectida en les seues construccions. La transformació d'un polígon regular en una altra figura de la mateixa superfície va produir formes desconegudes fins aleshores en la història de l'Art.

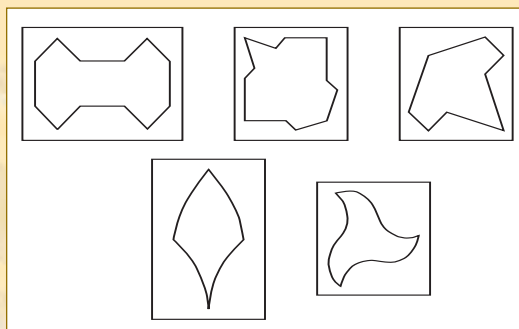
Els coneixements geomètrics i tècnics dels artistes islàmics d'esta època han sigut font d'inspiració per a innumerables artistes, com el famós dibuixant i pintor holandès M. C. Escher.



MOSAICS DE L'ALHAMBRA

A continuació et proposem la construcció i estudi de cinc dels mosaics nassarites més coneguts: el pardalet, l'avió, el peix volador, l'escata i l'os.

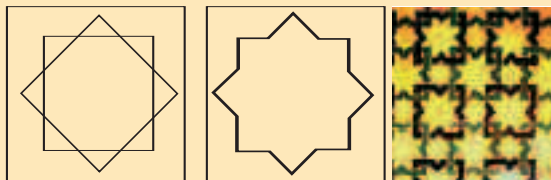
- 4.1. Per a aconseguir les tesseles de l'os, l'avió, el peix volador i l'escata s'ha partit d'un quadrat. Quines transformacions s'han fet per a aconseguir-les? Suposa que el quadrat té 8 cm. de costat.



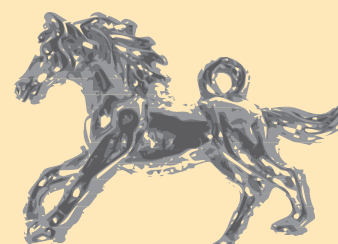
Per a la tesela del pardalet es partí d'un triangle equilàter.

- 4.2. Aconsegueix recobrir el pla amb elles. Quines transformacions (translacions, girs, etc.) has de fer a la peça base per a poder adaptar-les unes al costat de les altres?
- 4.3. Ja que el quadrat utilitzat té de costat 8 cm determina el perímetre de l'os, l'avió i el peix volador.
- 4.4. Indica els eixos de simetria de cada una de les tesseles dibuixades.
- 4.5. Dissenya les teues pròpies llosetes utilitzant quadrats i triangles. Quina tècnica cal utilitzar en cada cas?
- 4.6. Altres mosaics tenen el seu origen en el solapament de polígons. Combinant quadrat i rotació es crea una estructura que regna en l'ALHAMBRA sobre totes: el **segell de Salomó**.

- a) Indica totes les simetries de la figura central.
- b) Si el costat del quadrat mesura 8 cm. determina el perímetre i l'àrea.



- 4.7. Construeix basat en el segell de salomó, per mitjà de repetició, algun motiu ornamental.



5. UN JOC MEDIEVAL: EL MORRIS

S'han trobat taulers del joc en l'antic Egipte (1400 a.C.) i a Sri Lanka (100 d.C.). També en el barco viking de Gokstad (900 d.C.). S'ha especulat sobre si els grecs o els fenicis van introduir el joc en el nord d'Europa, mentre hi ha qui opina que van ser els àrabs a través d'Espanya els introductors del joc a través del sud d'Europa.

El que si és cert que en el *Llibre dels Jocs* produït sota la direcció d'Alfonso X el Savi (1221-1284) apareixen les regles i il·lustracions del tauler del morris.

Este llibre és una recopilació de tots els jocs coneguts fins llavors. Alfonso X va supervisar el treball conjunt de jueus, musulmans i cristians que van produir una sèrie de textos sobre història, astronomia, religió,... i jocs!



EL JOC DEL MORRIS DE 9

Nombre de jugadors: Dos.

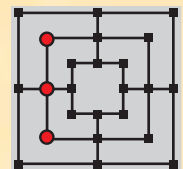
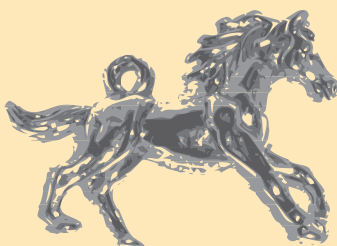
Nombre de fitxes: Nou per a cada jugador.

Objectiu: Eliminar el nombre més gran de fitxes de l'adversari.

Origen del joc: Antic Egipte abans d'1400 a.C.

REGLES DE JOC

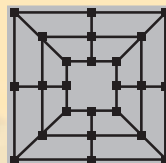
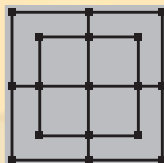
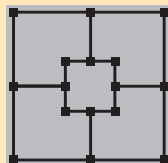
- I. Cada jugador disposa de dotze fitxes de diferent color que van col·locant alternativament sobre el tauler. Se sorteja qui inicia la col·locació de les fitxes.
- II. Una vegada col·locades totes les fitxes mouen una fitxa cada vegada a un lloc adjacent buit seguint una línia del tauler.
- III. Cada jugador intenta formar una fila de tres fitxes al llarg de qualsevol línia del tauler (es coneix com a forma un "molí").
- IV. Si l'aconsegueix captura la fitxa que vullga de l'adversari i la saca del tauler.
- V. Perd el jugador que quede amb dos fitxes només o queda bloquejat sense poder moure.
- VI. Quan un jugador ha capturat totes les peces del contrari, la partida ha acabat i ha guanyat.



5. UN JOC MEDIEVAL: EL MORRIS

JOC DEL MORRIS DE 5, DE 7 I DE 12

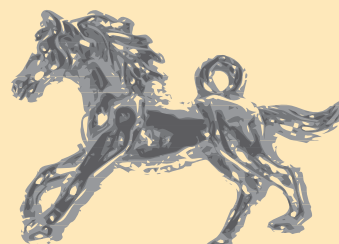
Estes variants del joc segueixen les mateixes regles però, com indica el seu nom, utilitzen un nombre diferent de fitxes.



- 5.1. Joga amb el teu company o companya diverses partides amb els diferents tipus de "Morris".

Per a cada un dels diferents taulers de Morris contesta a les preguntes següents:

- 5.2. a) Hi ha un moviment d'obertura òptim?
b) Quantes són les posicions possibles després que cada jugador haja fet un moviment?
c) Quin és el màxim nombre de fitxes que pot haver-hi sobre el tauler sense que es forma cap "molí"?
- 5.3. Si els costats dels quadrats dels taulers són de longitud 1, 2 i 3 cm, quina serà la longitud total de les línies del tauler?
- 5.4. Si una formiga haguera de recórrer totes les línies del tauler, partint d'una posició arbitrària, quin seria el camí més curt a seguir en cada un dels taulers?



6. EL NOMBRE CORDOVÉS

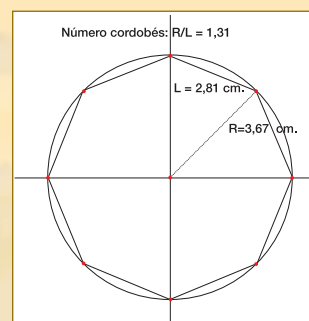


Igual que el nombre auri apareix en infinitat de situacions: en la naturalesa, en arquitectura etc, hi ha un altre nombre molt menys conegut però que també està present en determinades construccions geomètriques.

Així com el nombre d'or és la proporció entre el costat del decàgon regular i el radi de la circumferència circumscripita, el nombre cordovés relaciona el costat d'octògon regular amb el radi de la circumferència circumscripita:

Al ser més fàcil construir un octògon regular que un pentàgon, la dita proporció es va utilitzar tant en obres pictòriques com arquitectòniques.

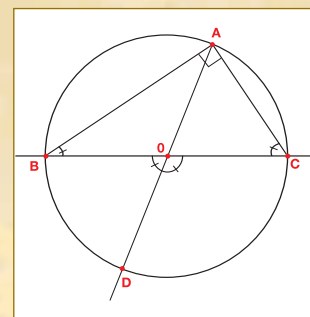
El nom prové de l'ús que es va fer d'ell en la construcció de la mesquita de Còrdova, per mitjà de la utilització de l'arc de ferradura. També van ser utilitzats, per la cultura andalusí l'anomenat arc de ferradura apuntat.



L'arquitecte espanyol Rafael de la Falç Arderius, considerant les últimes tècniques de mesurament obtingut del *papir de Rhind* indica que entre les diagonals d'un rectangle amb eixa proporció encaixa perfectament la *Gran Piràmide* d'Egipte.

6.1. Demostrea que si un triangle inscrit en una circumferència té a la hipotenusa com a diàmetre és un triangle rectangle.

- Com són els triangles OBA i OCA?
- Si anomenes $\alpha = \angle OBA$ y $\beta = \angle OCA$, a dos angles dels triangles, quant val l'angle BAC?
- Calcula els angles BOD i COD i justifica que el triangle és rectangle.

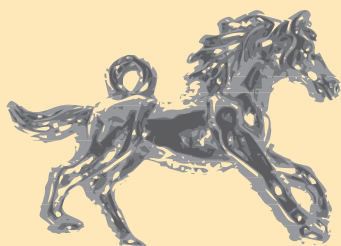


6.2. Obtindràs el valor del nombre cordovés, que és el nombre irracional.

$$C = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

Per a això, observant la figura, aniràs contestant a les preguntes següents:

a) Com és el triangle OMN? Aplica el teorema de Pitàgores i expressa MN en funció del radi R.



b) Justifica que $OP' = MN/2$.

El teorema del catet diu "En un triangle rectangle cada catet és mitjana proporcional entre la hipotenusa i la seua projecció sobre ella".

∂^0 Cicle de l'ESO. Matemàtiques, **Idèmia**

A diagram of a circular sector with a radius of 1 and a central angle of 22.5° . The origin is labeled 0. Point A is on the arc, and point B is on the radius at distance 1 from the center. The distance AB is labeled as 0.3827.

$$C = \sqrt{2} \cos\left(\frac{45}{2}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}.$$

$$2x^4 - 4x^2 + 1.$$

A diagram showing a circle with a horizontal chord. A vertical radius is drawn from the center to the top of the circle. The chord is labeled 'L' and the radius is labeled 'R'. The chord is tangent to a smaller circle inside the larger one.



7. MONEDES EN L'EDAT MITJANA

El bescanvi va ser la primera forma de dur a terme els intercanvis comercials.

Després va arribar l'anomenada "moneda natural", una mercaderia preada, encara que abundant, el valor de la qual estava més o menys convingut: sal, ramat, ferramentes, armes... A poc a poc, les primeres peces metàl·liques realment considerades com a monedes van evolucionar en el seu disseny fins a arribar a la seua forma circular.

Encara que l'encunyació de moneda en la península Ibèrica es remunta al segle III a.C. analitzarem el que ocorre a Espanya durant la Baixa Edat Mitjana.



S'utilitza universalment monedes d'or i plata, ja que estos eren metalls preciosos molt valorats i precisament per això complien les necessitats d'un sistema monetari: l'alt valor de canvi de l'or i la plata significava que quelcom molt costós ocupava poc espai, la qual cosa contribuïa a facilitar el transport i magatzematge, i augmentava la seua utilització en el comerç internacional o entre regions molt distants.



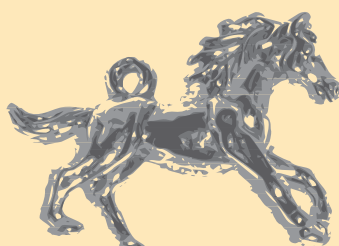
Moltes monedes es fabricaven en plata pura, però com era tendra i blana van realitzar aliatges amb altres metalls, com el coure, així, la llei d'una moneda és la proporció de metall preciós que conté en relació amb el seu pes total.

Actualment la llei de la plata es mesura en mil·lèsimes, i el que anomenem "plata de llei" designa una plata de 925 mil·lèsimes, és a dir, que de cada 1000 unitats d'aliatge, 925 són de plata pura. La plata de llei conté un 92,5% de plata pura.

En l'època medieval, la llei de la plata es mesurava en diners i grans. La plata pura tenia 12 diners. Una plata de llei 1 diners tenia una part de plata i 11 de coure, és a dir, la llei de la plata indicava la part de les 12 de plata i la resta era de coure. Una plata de llei 5 diners tindria 5 parts de plata pura i 7 de coure.

Posteriorment van aparèixer alguns divisors dels diners: el gra, la meaja i la pujeza, que tenien les equivalències següents:

1 diners eren 24 grans
1 meaja eren 12 grans és a dir, $\frac{1}{2}$ diners
1 pujeza eren 6 grans o $\frac{1}{4}$ de diners



Les monedes van començar a devaluar-se i la llei va passar a expressar-se en diners i grans. Per exemple, una plata de llei 10 diners i 8 grans tindria si ho expressem en grans un total de $12 \times 24 = 288$ grans. Una quantitat de plata de $10 \times 24 + 8 = 248$ grans. Tindria una quantitat de plata pura de 86,11%, és a dir 86,11%.

7. MONEDES EN L'EDAT MITJANA

Els Reis Catòlics van establir que la Llei mínima per a la plata havia de ser d'11 diners i 4 grans.

7.1. Esbrina quina proporció de plata pura contenia. És major o menor que la que conté actualment la plata de Llei?

La fabricació de monedes en l'Edat Mitjana era una de les activitats industrials més prestigioses, i els mestres que les feien necessitaven conèixer com calcular les proporcions de l'aliatge. Per això, en els llibres d'aritmètica de l'època apareixien problemes sobre aliatges per a ensenyar estos conceptes.

A continuació et proposem uns problemes que apareixen en el llibre en castellà d'aritmètica comercial més antic que es coneix i que és el manuscrit número 46 de la col·legiata de sant Isidor de Lleó.

7.2. Si et diuen que el rei mana llaurar a 7 diners de Llei i tenim dos plates, una de Llei d'11 diners i una altra de Llei de 2 diners, quina proporció prendries de cada una de les dos plates per a formar l'aliatge de 7 diners?

Intenta tu resoldre el problema, si no ho aconseguixes esta és la solució explicada que apareix en el text:

Si de 7 resta 2, queden 5 i col·loca el 5 davall de l'11; d'altra banda, si d'11 restes 7, queden 4 i col·loca el 4 davall del 2.

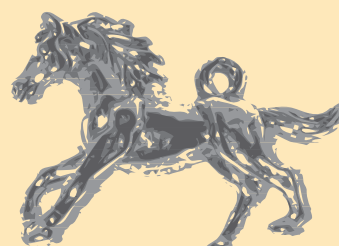
Com $5 + 4 = 9$, la resposta és que per a fabricar 9 marcs de plata de Llei de 7 diners ha de prendre 5 marcs de Llei d'11 diners i 4 marcs de Llei de 2 diners.

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 11 \qquad 2 \\ 5 \qquad 4 \end{array}$$

7.3. Si tenim plata de Llei de 12 diners quina plata i quin coure prendrem per a obtenir un aliatge de 6 diners?

7.4. Si et diuen que el rei mana llaurar a Llei de 5 diners i 4 grans i tenim plata de 7 diners i 5 grans quant coure haurem de mesclar perquè vinga aliat a Llei de 5 diners i 4 grans?

7.5. Es combinen 4 lingots de plata de Lleis diferents, 1 lingot de 5 marcs i Llei de 9 diners, un altre de 6 marcs i Llei de 8 diners, un altre de 7 marcs i Llei de 9 diners i un de 8 marcs i Llei de 3 diners. Quina és la Llei de la mescla?



8. L'ARITMÈTICA: GASPÀR NICOLÁS

Gaspar Nicolás va ser un autor important en el panorama de l'aritmètica portuguesa del segle XVI. Les dades sobre la seua vida són escassos, però la seua obra ens revela un matemàtic notable i un innovador imaginatiu de l'aritmètica. A ell es deuen per exemple les primeres referències al cèlebre matemàtic italià Paccioli i també el primer esforç per a introduir a Portugal el sistema de notació àrab.

El llibre més antic consagrat a Portugal a l'Aritmètica té per títol *Tratado da prática Darismetica*, i va ser publicat per primera vegada en 1519, el seu autor era Gaspar Nicolás. A Espanya, abans d'aparèixer a Portugal el llibre de Gaspar Nicolás, havien sigut publicats els tractats d'Aritmètica de Prunera, Juan d'Ortega i Silici, seria interessant comparar estos llibres amb el de l'autor portugués.

Comença este tractat amb alguns capítols en què apareixen regles per a sumar, restar, multiplicar i dividir nombres enters i fraccionaris, per a extraure arrels quadrades de nombres enters i per a sumar progressions. Segueixen després nombrosos problemes de què l'autor dóna les solucions, emprant per a això la regla de tres, la regla de la falsa posició, etc. Alguns d'estos problemes són d'utilitat pràctica, altres són interessants curiositats numèriques.

A continuació et proposem alguns dels problemes que apareixien en este llibre:

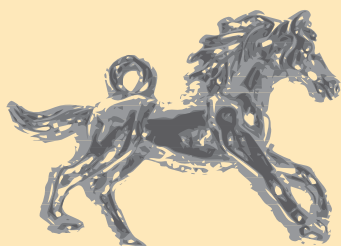
- 8.1. Un quintar de clau val 100 cruzados, un de canella 60 i un de jengibre 40. Arriba un mercader que volia tant d'una espècia com d'una altra però només podia pagar 350 cruzados en total. Quina quantitat comprarà de cada espècia?
- 8.2. Una pila té quatre canelles, destapant el primer torn es buida en 6 hores. Tapant el primer torn i destapant el segon es buida en 5 hores i tornant a tapar este i destapant el tercer es buida la dita pila en 4 hores. Si tapem el tercer i destapem el quart es buida la pila en tres hores. Ara em pregunte, destapant al mateix temps els quatre torns, en quantes hores estarà la dita pila buida?

La major part de les aritmètiques publicades a Europa a partir del segle XIII contenen un problema d'este tipus. Tenim a continuació una altra versió del problema que també apareix en el llibre de Gaspar Nicolás:

- 8.3. Una nau va des de Lisboa fins a l'illa de Madeira amb les tres veles que té, usant només la vela més xicoteta tardarà a arribar a l'illa tres dies. Si utilitza per a navegar la segona vela, que és un poc major, tardarà a arribar a Madeira 2 dies, i si utilitza només la vela major, tardarà a arribar a l'illa 1 dia. Ara em pregunte, desplegant totes les veles i estant sempre el mar i el vent de la mateixa manera, en quants dies estarà la nau en la dita illa?



- 8.4. Si et digueren que un home vol fer una torre de pedra i un pedrer promet fer-ho en 3 dies, un altre pedrer promet fer-la en dos dies i un tercer en un dia. El senyor de la torre mana que els tres treballen junts en la torre per a fer-la en un temps més breu. Ara em pregunte en quant de temps estarà feta la dita torre?



8. L'ARITMÈTICA: GASPAR NICOLÁS

La influència del comerç marítim va portar a molts autors a presentar diferents versions dels mateixos problemes com les que va realitzar Gaspar Nicolás. Estos problemes apareixen en les aritmètiques europees medievals i de l'època renaixentista i així mateix en els llibres escolars del segle XXI.

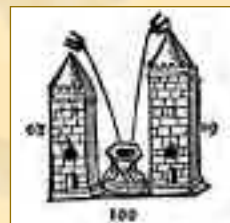
En el llibre Aritmètica pràctica de 1604 de l'espanyol Jerónimo Cortés apareix el problema següent:

- 8.5. Si quatre flamencs beuen 10 cànters de vi en 3 dies i cinc espanyols beuen 20 cànters en 6 dies, es pregunta, bevent tots junts, en quants dies acabaran un barril de 60 cànters?

A continuació et proposem uns quants problemes que també apareixen en el llibre de Gaspar Nicolás i que podràs resoldre usant el Teorema de Pitàgores:

8.6. **Les dos torres i la font.**

Dos torres, d'alt respectivament 90 i 80 brases, estan separades una de l'altra per una distància de 100 brases. Entre ambdós torres hi ha una font en tal lloc que dos aus que estan col·locades cada una damunt d'una de les torres, es llancen des de la seua torre al temps i arriben al mateix temps a beure a la font. A quina distància està situada la font de cada una de les torres?



8.7. **La torre i l'escala.**

Una escala té 20 brases d'alt i està recolzada sobre una torre que també mesura 20 brases. El peu de l'escala es troba a 12 brases de distància de la base de la torre. Quant li falta a l'escala per a arribar a la cima de la torre?

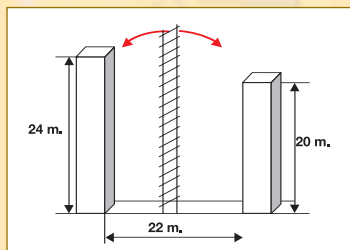


8.8. **L'arbre trencat.**

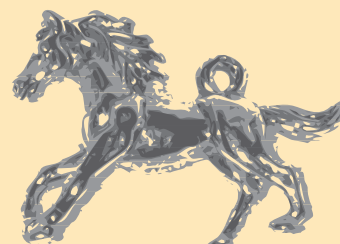
Un arbre de 50 brases està al peu d'un riu de 30 brases d'ample, però un rellamp cau sobre ell i el trenca de tal forma que la copa de l'arbre parirà a l'altra vora del riu. Per on es va trencar l'arbre?



8.9. **L'escala entre les dos torres.**



Dos torres que mesuren d'alt respectivament 20 i 24 metres, estan separades una d'una altra per una distància de 22 metres. En quin lloc entre les dos torres ha de col·locar-se una escala perquè quan la recolzem en qualsevol de les dos torres arribi a la cima? Quant ha de mesurar l'escala d'alt?



9. LA BARRACA VALENCIANA

La feraç horta valenciana, que s'estén al llarg de la costa, des de Carcaixent fins a Sagunt, té zones, com la de L'Albufera, de característiques molt acusades. La vivenda rural és la barraca, i en ella podem distingir els tipus següents: la barraca d'hortolans, en l'horta pròpiament dita; la de pescadors, en la platja, i en L'Albufera les dos modalitats.



El clima de València i la fertilitat de les seues terres permeten diverses collites a l'any, amb un sistema d'explotació intensiva que precisa una constant atenció. Este és el motiu que l'hortolà construísca la seua vivenda al peu de la seua parcel·la, emprant, quasi únicament, amb sentit de la màxima economia, els materials que brinda la naturalesa: canyes, fang, juncs i canyissos.

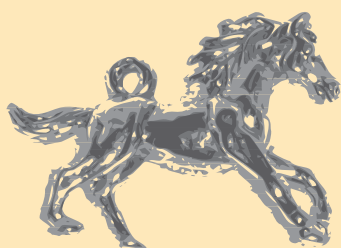
La barraca de l'horta respon a un tipus molt definit, que a penes ha patit variació amb el pas del temps. És de planta rectangular, d'uns 9 x 5,50 m., i coberta a dos aigües amb cavallet perpendicular a la fatxada —quasi sempre orientada al migdia—, que està en un dels costats menors.

La distribució és sempre pareguda: una porta, situada a un costat de la fatxada, dóna accés a un ampli pas, que recorre tota la longitud de la barraca i acaba amb una altra porta en la fatxada oposada, per a facilitar la circulació d'aire. Este corredor servix de cuina, estança i magatzem d'apers.

En l'altra crugia es distribuïxen els dormitoris, generalment tres. Al porxe o andana, que antigament es destinava a la cria de cucs de seda, es puja per una escala de mà.

Les parets, d'uns 2,50 m. d'altura, es fan amb atovons, anomenats gasons, que es col·loquen en asta sencera o en mitja asta, segons l'economia que es perseguisca.

El carener de la coberta es remata amb una creu de fusta en cada extrem. D'aquest acabat en creu s'ha escrit que, en el segle XVI, pregonava la qualitat de cristians vells dels habitants de la barraca, enfront de les habitades per moriscos. Però no hi ha proves suficients per a mantindre esta teoria i, segons pareix, es tracta simplement d'un símbol piadós.



9. LA BARRACA VALENCIANA

9.1. En els afores de la ciutat on viu Pedro hi ha una barraca molt antiga. Segons li han informat Pedro, la barraca és de planta rectangular i té una superfície de 4.590 dm^2 a més, se sap que la seua longitud excedix en $3,9 \text{ m}$ a la seua amplària. Amb estes dades, esbrina les dimensions de la barraca.

9.2. El propietari de la barraca ha decidit enrajolar-la amb taulells quadrats.
a) Quina pot ser la major grandària dels taulells?
b) Quants taulells necessitarà?

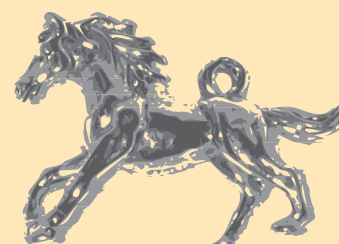
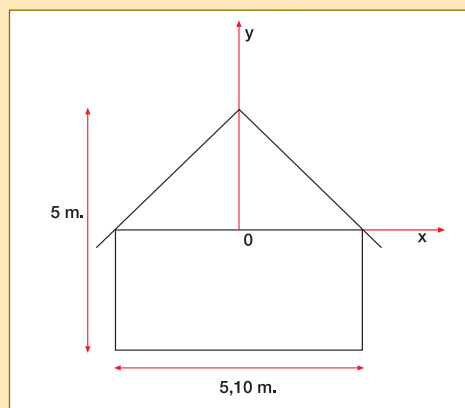
Nota: fes ús del resultat anterior.

9.3. El propietari també ha decidit pintar-la. Per a pintar-la pot recórrer a un pintor que tardaria tres hores a fer el treball o a un aprenent que tardaria el doble. Si el propietari decidix cridar als dos perquè treballen junts al mateix temps,

a) Quant de temps empraran els dos en el treball?

b) Una altra parella de pintors (formada per un cap i un aprenent) tardaria 3 hores a pintar la barraca, si se sap que l'aprenent tarda 1 hora més que el cap, quantes hores tarda l'aprenent?

9.4. Tenint en compte la figura, calcula les equacions de les rectes que representen el sòl, les parets laterals i l'aleró de la teulada de la barraca. Nota: tin en compte la situació del sistema de referència. L'altura del sòl a l'andana és de $2,5 \text{ m}$.



10. LA CLEPSIDRA: RELLOTGE D'AIGUA

La necessitat saber l'hora encara en els dies ennuvolats i a la nit, va preocupar ja des de molt antic. Els rellotges d'aigua es van basar en la regularitat del descens de la superfície d'un líquid contingut en un recipient amb un orifici xicotet d'eixida on la velocitat d'eixida depén de la pressió en el fons del recipient.

Amoutons va ser el primer que va construir un d'estos rellotges. Els egipcis van emprar estos rellotges però ja perfeccionats, perquè tenien una corriola i una cadena en què els seus extrems estaven units un al flotador i l'altre a un contrapés. També van utilitzar dos recipients. Plató va introduir el rellotge d'aigua a Grècia, l'any 157 a.C.

Clepsidra prové del vocable llatí clepsydra, que al seu torn deriva del grec klepsydra, composta d'hydro (aigua) i klepto (jo robe). La idea és que el recipient inferior roba l'aigua (o l'arena) del superior.

Solien estar formats per dos recipients, de manera que el recipient inferior arreplegara l'aigua que eixia de l'altre. Suposem que els recipients són cilíndrics.

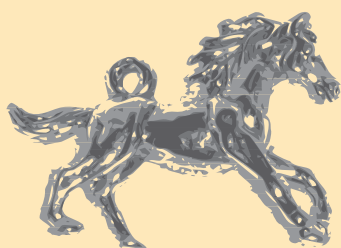


La velocitat d'eixida d'un líquid depén, a més de la secció del forat, de l'altura de l'aigua (llei de Torricelli).

Per a una "clepsidra" cilíndrica de base donada, el temps de buidatge és funció de l'altura de l'aigua d'acord amb la fórmula,

$$t = \frac{1}{k} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H})$$

sent k un paràmetre que mesura la secció del forat d'eixida.



10. LA CLEPSIDRA: RELOJ DE AGUA

10.1. Si $t = 6 - \sqrt{H}$ amb H en cm. i t en minuts, és la funció per a una clepsidra determinada es demana:

- Quina altura inicial té l'aigua? Quant tarda a buidar-se?
- Expressa $H=f(t)$ i representa la funció.

10.2. Si en l'equació de la clepsidra fem $k=2$. Què ocorre? Per què? Troba $H=f(t)$ i representa-la.

10.3. Quant caldrà augmentar el volum inicial perquè amb este major forat d'eixida tarde el mateix a buidar-se. Troba la fórmula $H=f(t)$ i representa-la.

10.4. Troba les fórmules de $t=f(H)$ i $H=f(t)$ per a una clepsidra d'altura 64 cm. es buide en 20 minuts. Representa-les conjuntament. Com són les seues gràfiques?

- Pots utilitzar el programa DERIVE per a fer les representacions gràfiques.

