

EGIPTE

FITXES DE TREBALL. ÍNDEX DE CONTINGUTS		
ACTIVITAT	BLOC	CONTINGUTS
1. El volum de la piràmide	-Geometria	-Volums
2. El passeig de la musaranya	-Geometria	-Problemes mètrics
3. Els tensors	-Àlgebra	-Nombres reals
4. Quina fracció!	-Àlgebra	-Nombres reals
5. Les fraccions egípcies i l'electrònica y la electrònica	-Àlgebra	-Nombres reals
6. El constructor de piràmides	-Geometria	-Trigonometria
7. Com calcular l'altura de les piràmides	-Geometria	-Trigonometria
8. Les inundacions	-Funcions	-Interpolació lineal
9. El gran matemàtic egipci	-Geometria	-Trigonometria
10. Quin repartiment!	-Aritmètica i àlgebra	-Suma dels termes d'una progressió

Batxillerat. Matemàtiques, Egipte



Batrillerat. Matemàtiques, **Egipte**



1. EL VOLUM DE LA PIRÀMIDE

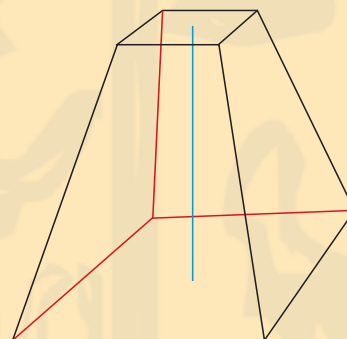
Encara que t'anem a proposar activitats específiques com a alumne de Batxillerat, et recomanem que lliges, prèviament, les que hem proposat als alumnes de Secundària, tant de primer com de segon cicle. Trobaràs informació de qualsevol tipus i ajuda per a resoldre els teus exercicis.

Com a prova d'esta relació, busca en les activitats per a segon cicle la proposta que vam fer per a calcular el volum d'un tronc de piràmide, utilitzant el mètode egipci. Ara, anirem un poc més lluny i t'anem a proposar que aprofites l'algoritme egipci per a deduir la formula d'este volum, a partir de l'exemple proporcionat pel papir. Et recorde que apareix de la manera següent en el problema 14 del papir de Moscou:

Exemple de calcular una piràmide truncada.

Si et diuen: Una piràmide de 6 d'altura per 4 de base (el quadrat inferior) per 2 de dalt (el quadrat superior), que és resolt per mitjà d'una sèrie de passos successius:

- Fas el quadrat d'este 4; el resultat és 16.
- És el doble de 4 [multiplicar 4 per 2]; el resultat és 8.
- Fas el quadrat d'este 2; el resultat és 4.
- Afiges el 16 i el 8 i el 4; el resultat és 28.
- Prens la tercera part de 6; el resultat és 2.
- Prens 28 dos vegades; el resultat és 56.
- Fixa't, [el volum] és 56. Trobes [que açò és] correcte.

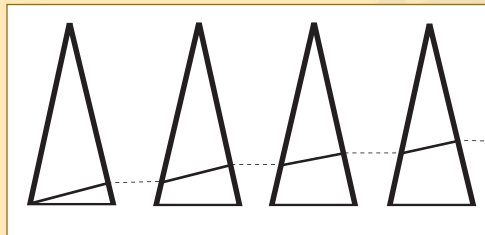


1.1. Fixant-te en com ho feien els egipcis dedueix la formula del volum de la piràmide truncada, anomenant "a" al costat de la base major, "b" a la base menor i "h" a l'altura.



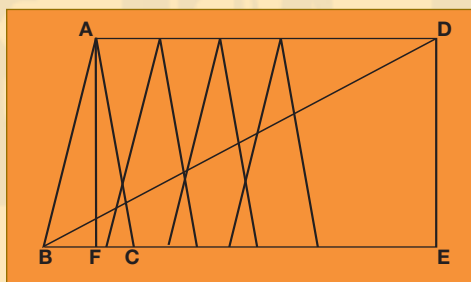
2. EL PASSEIG DE LA MUSARANYA

Seguim amb les piràmides egípcies per a donar-vos a conèixer un curiós problema extret d'Internet. Conten que, sent faraó Amenofis IV, en un dels monuments funeraris menors, una *musaranya* va complicar la vida dels savis oficials. Un dia, segons pareix, la pintoresca *bestiola* es va decidir a comprovar el camí que recorreria per a arribar al vèrtex superior d'esta xicoteta piràmide. En compte de pujar en línia recta va pensar que seria més còmode partir d'un vèrtex de la base d'aquella piràmide regular, i seguir una trajectòria perpendicular al costat oposat, tal com es mostra en la figura, sense parar fins a arribar a la cima. Les cares laterals de la piràmide eren triangles isòsceles de 4,5 m. de base i 6,2 m. d'altura.



El faraó, curiós, va voler saber, per a transmetre-li'l als seus súbdits, el total del camí recorregut per la singular musaranya. Va reunir als seus escribes més savis i els va plantejar la pregunta, quina és la longitud recorreguda pel xicotet rosegador?

- 2.1. Resol la qüestió plantejada anteriorment. Com a ajuda et recomanem que et recolzes en este dibuix i en el fet que els triangles DEB i CFA són semblants.



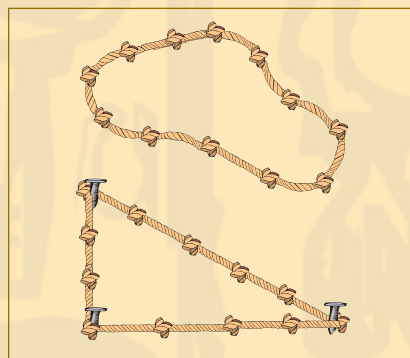
3. ELS TENSADORS

Com segurament saps, tot girava al voltant del riu Nil, este regava els cultius de la zona i permetia que es navegara sobre ell. El que potser no sàpies és que el Nil, en la seua època de crescuda, inundava els terrenys pròxims, la qual cosa era fonamental per a la fertilitat de les terres, però feia que al descendir el nivell de les aigües les delimitacions dels terrenys quedaren desdibuixades. Així, cada vegada que abaixava el nivell de les aigües calia tornar a marcar el terreny particular de cada propietari. D'això s'encarregaven els "tensadors de corda", com els va anomenar Heròdot.

D'esta manera, van anar apareixent distints instruments de mesurament, al mateix temps que descobrien mètodes per a calcular l'àrea (a vegades aproximada) d'algunes figures geomètriques molt conegudes. Per exemple, els problemes 6 i 7 del papir de Rhind i de Moscou parlen de com calcular l'àrea d'un triangle i d'un rectangle concrets, respectivament.

Si bé la forma de mesurar els terrenys s'ha perfeccionat, es conserva la paraula que significa "mesurar la terra" i que ara s'utilitza per a designar una part de les Matemàtiques que s'ocupa d'estudiar les figures i cossos que es poden traçar en l'espai. La paraula la utilitzes des de fa temps, endevines quin és? Perquè sí, és Geometria.

Estos "tensadors" utilitzaven cordes de dotze nucs que al tensar-les marcaven línies perpendiculars sobre el sòl, ja que formaven un triangle rectangle de costats 3, 4 i 5. No obstant, es poden construir altres triangles rectangles que proporcionen línies perpendiculars, únicament han de complir la mateixa relació que complix el de la figura i és $3^2 + 4^2 = 5^2$. A les ternes de números a , b i c que complixen que $a^2 + b^2 = c^2$ se'ls anomena ternes Pitagòriques i si construïm un triangle amb els costats de longitud a , b i c , serà un triangle rectangle.



Batrillerat. Matemàtiques, Egipte



3. ELS TENSADORS

3.1. Eres capaç de trobar altres ternes pitagòriques i ser un bon tensador?

A més dels números 3, 4 i 5 hi ha infinitat de nombres enters i positius a , b , c que satisfan la relació $a^2 + b^2 = c^2$. A continuació, esbossarem el desenvolupament d'un algorisme que ens dóna ternes pitagòriques sense necessitat d'anar provant.

Per a començar, considerem tres nombres pitagòrics que siguin primers entre si (els altres es troben multiplicant-los per qualsevol factor sencer p). De la pròpia igualtat $a^2 + b^2 = c^2$, aïllant i utilitzant la fórmula de diferència de quadrats, obtenim, $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$, on els factors $c + b$ i $c - b$ són primers primers entre si, com a conseqüència de la hipòtesi inicial. Però si el producte de dos nombres primers entre si és un quadrat, llavors, cada un d'ells serà un quadrat, és a dir, $a^2 = (c + b)(c - b) = m^2 \cdot n^2$, amb la qual cosa:

$$a = mn \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

on m i n són nombres imparells primers entre si. Per exemple, per a $m = 7$ i $n = 3$ s'obté $21^2 + 20^2 = 29^2$.

3.2. Dóna valors a m i n per a formar altres nombres pitagòrics.

És evident que si a , b , c són un trio de nombres pitagòrics, els pa , pb , pc (on p és un factor sencer) seran també nombres pitagòrics. I al contrari, si els nombres de Pitàgores tenen un factor comú, poden ser simplificats per este, obtenint-se novament el grup de nombres pitagòrics.



4. QUÈ FRACCIÓ!

Com utilitzaven les fraccions? L'ús de fraccions que feien els egipcis és prou curiós i elaborat. Estes sempre tenien de numerador l'1 i de denominador qualsevol nombre enter major d'1. No tenien notació per a escriure fraccions que no foren del tipus anterior, a excepció, de les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$. Com veus, qualsevol altra fracció que puguem usar ara no tenia sentit per a ells. Així, $\frac{2}{5}$ en la seua concepció aritmètica era representada com $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, tal com s'arplega en el papir de Rhind. Els sumands sempre eren diferents, mai $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Pot paréixer una representació poc útil i rebuscada, però potser es base en el concepte de fracció com la divisió d'un tot en n parts. No se sap exactament el mètode que usaven per a aconseguir esta descomposició, perquè no és única.

- 4.1.** De fet, ja hem proposat tres descomposicions diferents per a la fracció $\frac{3}{4}$, en les activitats de segon cicle, a saber, $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{n}$. Obtén el valor de n i intenta trobar altres representacions diferents de $\frac{3}{4}$ com a suma de fraccions egípcies.



5. LES FRACCIONS EGÍPCIES I L'ELECTRÒNICA

En l'actualitat, podem trobar aplicacions a esta forma d'expressar les fraccions. Per exemple, resultaria molt senzill comparar fraccions i decidir quin és major si apareixen expressades com a suma de *fraccions egípcies*. Veiem, clarament, que $4/5$ és major que $3/4$ si comparem les seues respectives descomposicions.

$$\begin{aligned} 3/4 &= 1/2 + 1/4 \\ 4/5 &= 1/2 + 1/4 + 1/20 \end{aligned}$$

L'aplicació et pot paréixer un poc artificial, ja que, actualment l'ús de calculadores facilita este tipus de comparacions. Llig atentament el següent enunciat i descobriràs una altra interessant aplicació.

5.1. Com ja sabràs per altres assignatures, quan tenim un circuit elèctric podem agrupar les resistències en sèrie o en paral·lel. Ens interessen els circuits en paral·lel. La resistència equivalent d'un circuit en paral·lel de n resistències està donada per l'expressió: $1/R_{\text{equivalent}} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n$. Et recorda alguna cosa? Efectivament, tenim novament les fraccions egípcies. Les resistències comercials estan formades per la unió de 12 resistències estàndard i els seus múltiples de 10. Són les anomenades sèries E12, que tenen els següents valors (també hi ha la sèrie E24):

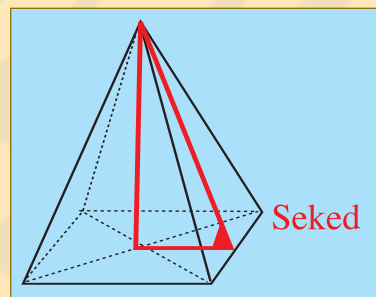
10	12	15	18	22	27	33	39	47	56	68	82
100	120	150	180	220	270	330	390	470	560	680	820
1000	1200	1500	1800	2200	2700	3300	3900	4700	5600	6800	8200

Suposem que vols construir tres circuits, cada un d'ells ha de tindre les resistències següents: 6, 20 i 30. Troba per a cada un d'estos circuits la combinació de resistències de la sèrie E12 més barata? (NOTA: suposarem que la combinació més barata és aquella que utilitze un menor nombre de resistències).



6. EL CONSTRUCTOR DE PIRÀMIDES

Encara que no es pot parlar d'una trigonometria egípcia, pareix obvi que uns certs coneixements sí que havien de tindre. Com, si no, alçar les seues piràmides sense estos mínims coneixements. Els problemes 56 a 60 del papir de Rhind tracten sobre pendents, altures i bases de piràmides. Un problema bàsic en la construcció d'una piràmide és mantindre la mateixa inclinació per a les quatre cares de la mateixa, ja que, en cas contrari, podrien no convergir en un únic vèrtex. Els egipcis expressaven este pendent per mitjà del càlcul d'una raó anomenada *seqt*, que es correspon amb la inversa de la nostra actual tangent, el que anomenem cotangent. En la pràctica es valdrien de triangles mestres que aplicarien a les cares laterals per a mantindre la seua inclinació inicial.



El *seqt* és, per tant, la forma en què els antics egipcis medien el pendent d'una superfície inclinada. Equivaldria, exactament, a la nostra cotangent, si utilitzaren la mateixa unitat en vertical i en horitzontal, però en mesuraments verticals utilitzaven com a unitat de mesura el *colze* (distància des del colze a la punta dels dits que equivalia a 0,523 metres) i en horitzontals el *pam* (1 colze = 7 pams). D'esta manera, expressaven el *seqt* en pams per colze.

- 6.1. Resol, per a començar, el problema 56 del papir de Rhind: *Quin és el seqt d'una piràmide de 250 colzes d'altura i 360 colzes de costat en la base.* Amb esta dada i l'ajuda de la teua calculadora obtén l'angle d'inclinació de la piràmide.
- 6.2. Expressa per mitjà d'un algoritme l'obtenció del *seqt* per a una piràmide les mesures de la qual vinguen expressades en metres. Resumix en una fórmula l'algoritme anterior. Recorda que el *seqt* ve expressat en *pams* per *colzes*.
- 6.3. La gran piràmide de Keops té base quadrada de costat 230 m. i cada una de les arestes mesura 218,5 m. Calcula el *seqt* d'esta piràmide, el seu angle d'inclinació i el seu volum. Per a fer-te una idea del seu grandària calcula el nombre de blocs cúbics de pedra de 2 m. de costat, necessaris per a omplir-la totalment.



7. COM CALCULAR L'ALTURA DE LES PIRÀMIDES

No obstant, el problema bàsic amb què s'enfrontaven era el de calcular l'altura de la piràmide que construïren. Disposaven del costat de la base i del seqt que emprarien. Amb estes dades podien calcular, prèviament, l'altura que aconseguiria la dita piràmide. A manera d'exemple, et presentem este procés que apareix en el problema 59 del papir de Rhind: *Si construïxes una piràmide el costat de de la qual la base és 12 (colzes) i amb un seqt de 5 pams i 1 dit, quina és l'altura?*

- Multiplica per dos el seqt amb l'objecte de considerar la base sencera, $2 \times 5 \frac{1}{4}$, ja que un pam equival a quatre dits.
- Dividix 6 entre $10 \frac{1}{2}$ per a reduir a la relació entre les mateixes unitats, $6 : 10 \frac{1}{2} = b$
- Esta quantitat es multiplica pel costat de la base, $b \times 12 = 8$ colzes.

7.1. Encara que el resultat final és correcte, hem introduït un error en el procés, eres capaç de descobrir-lo? Revisa el plantejament i els conceptes emprats en la resolució.



8. LES INUNDACIONS

Cada any, en el mes de Juny, com a conseqüència del desgel de les cimes dels "Montes de la Luna" (origen del riu Nil), començaven les inundacions. Estes feien que en alguns llocs, com en les goles de les primeres cascades, es pogueren observar augments de cabal d'entre 6 i 8 metres. Els egipcis van aprendre a predir la quantitat de collita segons l'altura que aconseguia l'aigua en les dites goles. Si era menor de 6 metres no es negarien suficients terrenys per a obtindre aliments per a tota la població. Si la crescuda era superior a 8 metres l'aigua arribava fins als poblats i els destruïa.



- 8.1.** Imaginem que amb una crescuda que aconseguia els 6 m. sobre el nivell normal del Nil s'obtinguera una collita que alimentara a 200.000 persones; i que si s'aconseguien els 8 m. s'obtingueren aliments suficients per a 600.000 persones. Utilitza la interpolació lineal per a predir la quantitat de persones que podrien menjar si la crescuda fóra de 7,5 m.
- 8.2.** Utilitza la interpolació lineal per a predir tots els egipcis que podrien alimentar-se si el Nil pujara 9 m sobre el seu nivell normal en la primera cascada.
És fiable esta predicció? per què?

Batxillerat. Matemàtiques, Egipte



9. EL GRAN MATEMÀTIC EGIPCI

El matemàtic més conegut nascut en una ciutat egípcia és **Claudio Ptolemeu**. Va nèixer en una ciutat de l'Alt Egipte (Ptolemais Hermiu) cap a l'any 100 de la nostra era i va morir a Alexandria 70 anys després. En eixa època, Egipte ja havia sigut ocupat, anys arrere, pels romans, després del suïcidi de Cleòpatra. Ptolemeu va ser un destacat astrònom i geògraf. La seua doctrina, que comprèn molts camps del saber, va ser exposada en tretze llibres que va anomenar *Gran composició matemàtica*, però que va rebre dels traductors àrabs el títol consagrat d'*Almagest*. Cap escrit de l'Antiguitat va tindre un èxit comparable a l'obra de Ptolemeu, els principis del qual van romandre indiscutits fins al Renaixement.



- 9.1. Utilitza Internet o busca en una enciclopèdia més dades sobre este savi i del seu *Almagest*. Esbrina quina va ser la seua relació amb la Trigonometria.



10. QUIN REPARTIMENT!

D'altra banda, el problema de progressions més antic no és el de la recompensa a l'inventor dels escacs, que té ja més de dos mil anys, sinó un altre molt més vell, repartició del pa, registrat en el papir de Rhind: *Entre cinc persones es van repartir cent mesures de blat, de tal sort que la segona va rebre més que la primera tant com li va correspondre a la tercera més que a la segona, a la quarta més que a la tercera i a la quinta més que a la quarta. A més, les dos primeres van obtindre set vegades menys que les tres restants. Quant va correspondre a cada una?*

- 10.1.** És evident que les quantitats de blat distribuïdes entre els cinc participants en el repartiment constitueixen una progressió aritmètica. Resol el repartiment per mitjà d'un sistema d'equacions.

Apareixen altres problemes relacionats amb progressions. Entre ells, el problema 79, l'únic sobre progressions geomètriques en l'Antic Egipte que ens és conegut, a més del primer exemple de matemàtica recreativa del que es té notícia. Es tracta d'una progressió geomètrica en què el primer terme és 7 i la raó també 7. En el problema es diu, en traducció lliure: *Hi havia una propietat composta per set cases; cada casa tenia set gats; cada gat es menjava set ratolins; cada ratolí es menjava set grans d'ordi; cada gra havia produït set mesures. Quant sumava tot açò? L'escriga obté la suma de tots els termes de la progressió, encara que este no pareix un objectiu lògic.*

- 10.2.** Utilitza la fórmula apropiada per a obtindre tu també esta quantitat.



