

# EGIPTO

## FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS

ACTIVIDAD	BLOQUE	CONTENIDOS
1. Repartiendo panes	-Aritmética y álgebra	-Números racionales. Operaciones
2. Repartos proporcionales	-Aritmética y álgebra	-Números racionales. Operaciones
3. La sombra de la pirámide	-Geometría	-Figuras planas y cuerpos elementales
4. Más alturas	-Geometría	-Figuras planas y cuerpos elementales
5. De pirámides y volúmenes	-Geometría	-Áreas y volúmenes
6. Pirámides truncadas	-Geometría	-Áreas y volúmenes
7. ¿Conoce el faraón el número $\pi$ ?	-Geometría	-Áreas y volúmenes
8. Volumen de un granero	-Geometría	-Áreas y volúmenes
9. Ecuaciones muy antiguas	-Aritmética y álgebra	-Ecuaciones de primer grado
10. Una de fracciones	-Aritmética y álgebra	-Números racionales. Operaciones

2º Ciclo de la E.S.O. Matemáticas, **Egipto**



# 2º Ciclo de la E.S.O. Matemáticas, **Egipto**



# 1. REPARTIENDO PANES

Los egipcios dominaban las operaciones aritméticas usuales, como suma, resta, multiplicación y división. Para las dos primeras, simplemente añadían o sustraían símbolos. Para las segundas, disponían de métodos propios, muy diferentes a los actuales, pero igualmente útiles para sus necesidades. Te recomendamos localizar, en el capítulo dedicado al primer ciclo, este asunto, y que aprendas como se manejaban con el cálculo aritmético.

El producto y multiplicación resultaban sencillos. Pero no la división no entera (no exacta), aunque el proceso es similar, salvo en el momento en que se agoten las duplicaciones, en el que se procede con divisiones. Por ejemplo, calcular  $21 : 6$ , consiste en averiguar qué número multiplicado por 6 da 21, es decir,  $? \times 6 = 21$

No duplicamos porque el doble de 12 superaría a 21.

1	6
2	12

Sin embargo, con la suma de las cantidades de la segunda columna no se obtiene 21 pues  $21 - 12 = 9$  y  $9 - 6 = 3$ , hemos de continuar, pero ahora con divisiones ( $1/2$ ,  $1/4$ ...):

Ahora utilizamos fracciones de 6.

1	6
2	12
$1/2$	3

Ahora sí es posible,  $21 - 12 = 9$  y  $9 - 6 = 3$  junto a  $3 - 3 = 0$ , indican que  $21 = 12 + 6 + 3$ , por tanto, la solución es  $2 + 1 + 1/2 = 3 + 1/2 = 3,5$ , es decir,  $21 : 6 = 3,5$ .

Si trasladamos estos conceptos a la vida cotidiana de los egipcios, vemos que son necesarios para proceder al reparto de alimentos, por ejemplo, hogazas de pan. Con el resultado anterior, el proceso para repartir 21 hogazas entre 6 egipcios sería dar 2 hogazas a cada uno (quedan  $21 - 12 = 9$ ), de las nueve restantes dar una a cada uno (quedan  $9 - 6 = 3$ ) y con los 3 panes que quedan partírlos en dos trozos y dar un trozo a cada uno.

- 1.1. Un problema frecuente ha sido la distribución de las raciones entre los miembros de una comunidad. ¿Sabrías dividir equitativamente, mediante el método de las duplicaciones sucesivas, 710 hogazas de pan entre 40 personas?



## 2. REPARTOS PROPORCIONALES

Sin embargo, la mayoría de los repartos en el antiguo Egipto eran desiguales. No percibía lo mismo un sacerdote, un escriba o un esclavo. Así el problema 65 del papiro de Rhind plantea una cuestión muy parecida a la siguiente:

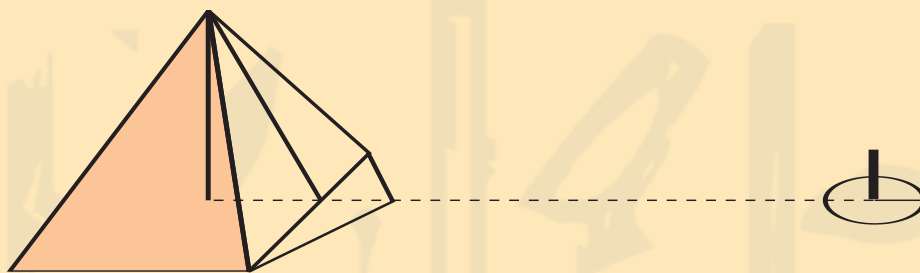
- 2.1. *Ejemplo de dividir 100 panes entre 10 hombres: un barquero, un guardián, teniendo cada uno el doble que los ocho marineros ordinarios. Así pues, si ocho hombres reciben su ración y dos reciben el doble, supondremos que hay 12 hombres entre los que repartir los 100 panes.*
- 2.2. Reparte, usando el método de las duplicaciones sucesivas, 320 panes entre 20 hombres: un capataz, un guardián, un sacerdote, un escriba, teniendo cada uno el doble que los 16 trabajadores restantes.



### 3. LA SOMBRA DE LA PIRÁMIDE

¿Sabían medir la altura de las pirámides? Los arquitectos egipcios hacían sus operaciones y construcciones geométricas sobre la arena del desierto, mediante cuerdas y estacas. Su procedimiento para medir la altura de una pirámide consistía en esperar a que el sol estuviese a  $45^\circ$  de altura sobre el horizonte.

En el proceso se clava una estaca verticalmente en el centro de un círculo, cuyo radio es igual a la longitud de la estaca. En el instante en que la sombra de la estaca toca el borde del círculo, se mide la longitud de la sombra de la pirámide y se le añade la mitad de la longitud de la base. Esa es la altura de la pirámide.



Este método presentaba el inconveniente de que había que esperar a las fechas adecuadas. El filósofo Thales no era egipcio, pero ideó un procedimiento para medir la altura de la gran pirámide de Keops sin tener que esperar a las fechas en que el sol a mediodía está a  $45^\circ$ . Su método se basaba en la semejanza de triángulos. Plantó una estaca vertical en el suelo, en el extremo de la sombra de la pirámide. Entonces, la estaca, su sombra y los rayos del sol forman un triángulo rectángulo semejante al que forman la altura de la pirámide, los rayos del sol y la sombra de la pirámide más la mitad de la longitud de la base de la pirámide.

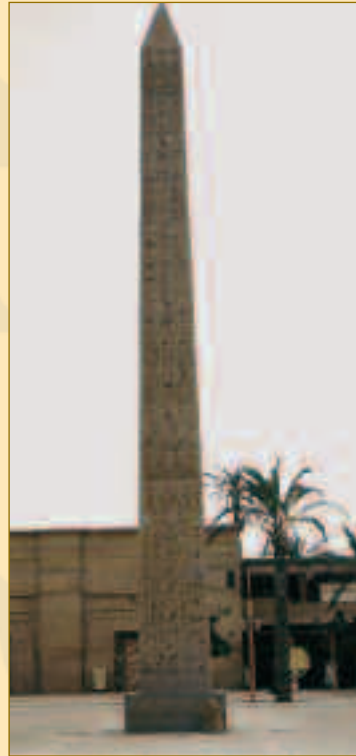
- 3.1.** Sabemos que la gran pirámide de Keops mide 230 m. de lado y que si clavamos una estaca de 1 m., cuando su sombra mide 1,5 m., la sombra de la pirámide mide 104 m. Realiza un dibujo aproximado de la pirámide y calcula su altura utilizando el método ideado por Thales.



## 4. MÁS ALTURAS

Puedes utilizar este método, basado en la semejanza de triángulos, para calcular la altura de cualquier objeto. Únicamente necesitarás una cinta métrica y algo de habilidad en el cálculo numérico. Tú mismo puedes formar con tu altura el triángulo que se forma con la estaca. Como ejemplo de la eficacia del método puedes probar con cualquier objeto del que conozcas su altura y que te sirva para comprobar si lo dominas.

Un ejercicio muy sencillo consiste en averiguar la altura del Obelisco o Aguja de Cleopatra, situado en la entrada de Terra Mítica, en la plaza del mismo nombre. El obelisco tenía como objeto atravesar las nubes y dispersar las fuerzas negativas que ocultan al Dios Sol. La Aguja de Cleopatra se construyó en 1468 a.C. y, actualmente, se encuentran (son dos realmente) en Londres y en Central Park de Estados Unidos.



- 4.1. Utiliza una cinta métrica para obtener la longitud de tu sombra y tu altura, y mediante el método ideado por Thales calcula la sombra de este obelisco, sabiendo que la altura del mismo es de 20,87 metros. (Supondremos que la diferencia de latitud y longitud no influyen).





## 5. DE PIRÁMIDES Y VOLÚMENES

Para que te hagas una idea de la enorme construcción que es la pirámide de Keops, te vamos a pedir que realices unos sencillos cálculos. Has de saber, previamente, que la unidad básica de superficie en el antiguo Egipto era el **setat**, que correspondía al área de un cuadrado de 100 codos de lado (un codo era una unidad de longitud que equivale a 0,523 m). Pues bien:

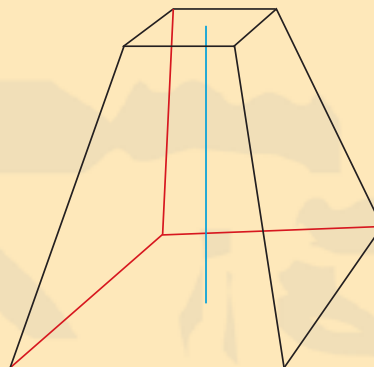
5.1. Calcula en setats y en  $m^2$  (para comparar), las áreas laterales y total de la gran pirámide de Keops, que mide 147 metros de altura y cuya base es un cuadrado de 230 metros de lado.

5.2. Calcula en **jars**, antigua unidad egipcia de volumen que equivale a 96 litros, y en  $m^3$  el volumen de la pirámide. ¿Cuántos camiones cisterna de 10.000 litros de capacidad se necesitarían para llenarla?



## 6. PIRÁMIDES TRUNCADAS

La mayor parte de la matemática egipcia nos ha llegado a nosotros a través de dos escritos fundamentales: los papiros de Rhind y de Moscú, pues bien, te pedimos que seas un buen escriba y que leas con atención el enunciado de otro problema, en concreto, el problema número 14 del papiro de Moscú, considerado como la auténtica joya de la matemática egipcia:



*Ejemplo de cómo calcular una pirámide truncada; si se os dice, una pirámide truncada de altura 6 y bases 4 y 2, debéis tomar el cuadrado de 4 que es 16, después doblar cuatro para obtener 8, tomar el cuadrado de 2 que es 4, sumar 16, 4 y 8 para obtener 28; después calcular  $\frac{1}{3}$  de 6 que es 2; multiplica 28 por 2 que da 56; veis, es 56.*

- 6.1. Sé un buen aprendiz de escriba y usa el procedimiento anterior para calcular el volumen de una pirámide truncada de 12 de altura, por 8 de base, por 5 de arriba.





## 7. ¿CONOCE EL FARAÓN EL NÚMERO $\pi$ ?

Hemos podido comprobar que los egipcios eran grandes geómetras, ¡cómo alzar, si no, sus pirámides! Sin embargo, desconocían las fórmulas geométricas que usamos, hoy en día, para obtener fácilmente áreas y volúmenes. Sus campos de cultivo tenían formas que representaban no solo rectángulos sino, en general, cuadriláteros de formas irregulares. No está documentado que cultivaran campos en forma distinta a la rectangular, pero parece probable que necesitaran el cálculo de superficies circulares para construir graneros cilíndricos. Quizá, por ello, sabían obtener, de manera aproximada, el área de un círculo.



Como prueba de ello, te mostramos el problema 50 del papiro Rhind cuyo enunciado es: *Calcula el área de un campo circular cuyo diámetro es 9 khet* (el khet es una medida de longitud equivalente a 52 m. aproximadamente). El procedimiento desarrollado en el propio papiro es así: *Resta al diámetro (que es 9)  $\frac{1}{9}$  del mismo, que es 1. La diferencia es 8. Ahora multiplica 8 veces 8, que da 64. Éste es el área del círculo.*

No obtenían el valor exacto del área, sino que calculaban una aproximación, relacionada con un octógono sobre el que situaban el círculo.

- 7.1. Utiliza esta aproximación para calcular el área de la base de un granero cilíndrico de 2 m. de radio.
- 7.2. Compara el resultado anterior con el que se obtiene mediante la fórmula actual, calculando el error relativo que se comete con el método egipcio.



## 8. VOLUMEN DE UN GRANERO

- 8.1. Si se diese como válida la aproximación del cálculo egipcio, ¿qué valor tendríamos que asignar a la constante  $\pi$ ?

De hecho, el problema 41 del papiro Rhind muestra cómo obtener el volumen de un granero de este tipo: Ejemplo de hacer un granero redondo (cilíndrico) de (diámetro) 9 (codos) y (altura) 10 (codos). Es claro, que si el valor para el área del círculo es aproximado, también será aproximado el volumen de los graneros construidos con base circular. El escriba indica las siguientes operaciones:

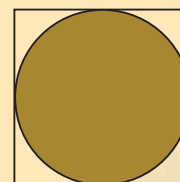
- Se calcula  $1/9$  del diámetro,
- se le resta al propio diámetro,
- dicho resto se multiplica por sí mismo,
- se multiplica por 10 (altura).

- 8.2. Compara el valor obtenido anteriormente con el que obtendrías si aplicaras la fórmula para el volumen de un cilindro.

Aún iban más allá, al afirmar que la relación entre el área de un círculo y la longitud de su circunferencia es la misma que la relación existente entre el área y el perímetro del cuadrado circunscrito a dicho círculo, es decir,

$$A_{\text{CÍRCULO}} / L_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = A_{\text{CUADRADO CIRCUNSCRITO}} / P_{\text{CUADRADO CIRCUNSCRITO}}$$

- 8.3. Pon a prueba a los geómetras egipcios y comprueba dicha relación para un círculo de radio 1 metro y su cuadrado circunscrito.



- 8.4. Comprueba la validez general de esta afirmación a partir de un círculo cualquiera de radio "r" (necesitas expresar de forma general el área y el perímetro del cuadrado circunscrito al círculo de radio r y comparar el resultado de su cociente con el del área de dicho círculo de radio r y la longitud de su circunferencia).



## 9. ECUACIONES MUY ANTIGUAS

Has podido comprobar que la Geometría era sin duda la parte de las matemáticas que más utilizaron los egipcios, pero, no sólo tenían conocimientos de Geometría, necesarios para construir las impresionantes pirámides, también podían resolver problemas que, en la actualidad, resolvemos mediante una ecuación de primer grado y que ellos resolvían como podían. Ahora te proponemos que con la única ayuda de tus conocimientos de Álgebra intentes resolver el problema 24 del papiro de Rhind, en el que se lee: *Calcula el valor del aha (montón) si el aha y un séptimo del aha son iguales a 19.*

- 9.1. Expresa mediante una ecuación de primer grado sencilla el enunciado del problema y resuélvela.
- 9.2. Resuelve el problema 26: *Una cantidad y su cuarto se convierten en 15, calcula la cantidad.*



## 10. UNA DE FRACCIONES

En las actividades para el primer ciclo hemos destacado que utilizaban fracciones, sobre todo, aquéllas con numerador 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4,..., y las fracciones  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{3}{4}$ . Nosotros, normalmente escribimos un número no entero en forma decimal, 3,75, o, mediante una fracción,  $\frac{15}{4}$ . Sin embargo, los egipcios utilizaban una curiosa forma de trabajar con fracciones. Estas siempre tenían de numerador el 1 y de denominador cualquier número entero mayor de 1. No tenían notación para escribir fracciones que no fueran del tipo anterior, ni siquiera hay muestras escritas de ellas. Por ejemplo, la fracción  $\frac{3}{4}$  era, para ellos, la suma  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , o, la fracción  $\frac{6}{7}$  era  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$ . Pero no consideraban descomposiciones de la forma,  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ , en las que se repetía el mismo sumando.

No sabemos exactamente el método que usaban para conseguir estas descomposiciones, pues no son únicas. En todos los escritos estudiados la descomposición que se ha encontrado es la más sencilla posible y no es un problema trivial encontrarla. Un número de matemáticos famosos se ha interesado por este problema y se ha encontrado diferentes algoritmos para realizar la descomposición.

**10.1.** Como hemos comentado anteriormente, la descomposición de una fracción en suma de “fracciones egipcias” no es única, ¿podrías escribir n tal que  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n}$ ? ¿Y tal que  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{n}$ ?

**10.2.** Resuelve el problema 13 del papiro de Rhind: Multiplica  $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$  por  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ .

