

EGIPTO

FICHAS DE TRABAJO. ÍNDICE DE CONTENIDOS

ACTIVIDAD	BLOQUE	CONTENIDOS
1. El volumen de la pirámide	-Geometría	-Volúmenes
2. El paseo de la musaraña	-Geometría	-Problemas métricos
3. Los tensadores	-Álgebra	-Números reales
4. ¡Qué fracción!	-Álgebra	-Números reales
5. Las fracciones egipcias y la electrónica	-Álgebra	-Números reales
6. El constructor de pirámides	-Geometría	-Trigonometría
7. Cómo calcular la altura de las pirámides	-Geometría	-Trigonometría
8. Las inundaciones	-Funciones	-Interpolación lineal
9. El gran matemático egipcio	-Geometría	-Trigonometría
10. ¡Menudo reparto!	-Aritmética y álgebra	-Suma de los términos de una progresión

Bachillerato. Matemáticas, **Egipto**



Bachillerato. Matemáticas, **Egipto**



1. EL VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

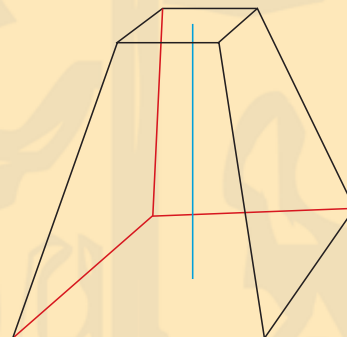
Aunque te vamos a proponer actividades específicas como alumno de Bachillerato, te recomendamos que leas, previamente, las que hemos propuesto a los alumnos de Secundaria, tanto de primer como de segundo ciclo. Encontrarás información de todo tipo y ayuda para resolver tus ejercicios.

Como prueba de esta relación, busca en las actividades para segundo ciclo la propuesta que hicimos para calcular el volumen de un tronco de pirámide, utilizando el método egipcio. Ahora, vamos a ir un poco más lejos y te vamos a proponer que aproveches el algoritmo egipcio para deducir la fórmula de este volumen, a partir del ejemplo proporcionado por el papiro. Te recuerdo que aparece del siguiente modo en el problema 14 del papiro de Moscú:

Ejemplo de cálculo del volumen de una pirámide truncada.

Si te dicen: Una pirámide de 6 de altura por 4 de base (el cuadrado inferior) por 2 de arriba (el cuadrado superior), que es resuelto mediante una serie de pasos sucesivos:

- Haces el cuadrado de este 4; el resultado es 16.
- Es el doble de 4 [multiplicar 4 por 2]; el resultado es 8.
- Haces el cuadrado de este 2; el resultado es 4.
- Añades el 16 y el 8 y el 4; el resultado es 28.
- Tomas la tercera parte de 6; el resultado es 2.
- Tomas 28 dos veces; el resultado es 56.
- Fíjate, [el volumen] es 56. Encuentras [que esto es] correcto.

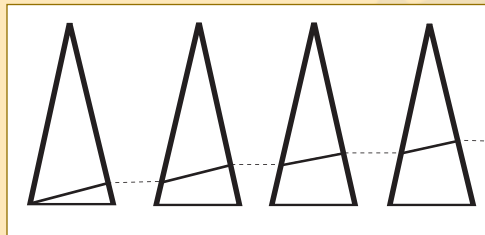


1.1. Fijándote en como lo hacían los egipcios deduce la fórmula del volumen de la pirámide truncada, llamando "a" al lado de la base mayor, "b" a la base menor y "h" a la altura.



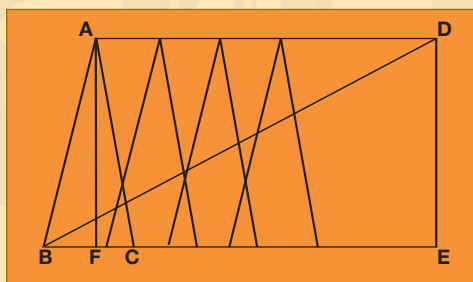
2. EL PASEO DE LA MUSARAÑA

Seguimos con las pirámides egipcias para daros a conocer un curioso problema extraído de Internet. Cuentan que, siendo faraón Amenofis IV, en uno de los monumentos funerarios menores, una *musaraña* complicó la vida de los sabios oficiales. Un día, al parecer, el pintoresco *bichejo* se decidió a comprobar el camino que recorrería para llegar al vértice superior de esta pequeña pirámide. En lugar de subir en línea recta pensó que sería más cómodo partir de un vértice de la base de aquella pirámide regular, y seguir una trayectoria perpendicular al lado opuesto, tal como se muestra en la figura, sin parar hasta alcanzar la cima. Las caras laterales de la pirámide eran triángulos isósceles de 4,5 m. de base y 6,2 m. de altura.



El faraón, curioso, quiso saber, para transmitírselo a sus súbditos, el total del camino recorrido por la singular musaraña. Reunió a sus escribas más sabios y les planteó la pregunta, ¿cuál es la longitud recorrida por el pequeño roedor?

- 2.1. Resuelve la cuestión planteada anteriormente. Como ayuda te recomendamos que te apoyes en este dibujo y en el hecho de que los triángulos DEB y CFA son semejantes.



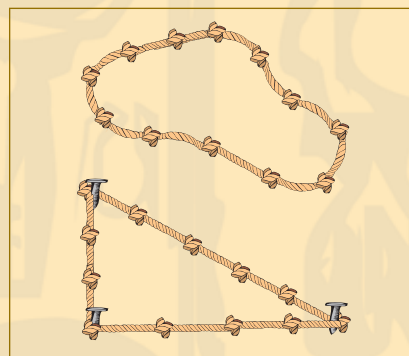
3. LOS TENSADORES

Como seguramente sabes, todo giraba alrededor del río Nilo, éste regaba los cultivos de la zona y permitía que se navegara sobre él. Lo que quizá no sepas es que el Nilo, en su época de crecida, inundaba los terrenos próximos, lo que era fundamental para la fertilidad de las tierras, pero hacía que al descender el nivel de las aguas las delimitaciones de los terrenos quedasen desdibujadas. Así, cada vez que bajaba el nivel de las aguas había que volver a marcar el terreno particular de cada propietario. De ello se encargaban los “tensadores de cuerda”, como los llamó Herodoto.

De esta manera, fueron apareciendo distintos instrumentos de medición, a la vez que descubrían métodos para calcular el área (en ocasiones aproximada) de algunas figuras geométricas muy conocidas. Por ejemplo, los problemas 6 y 7 del papiro de Rhind y de Moscú hablan de cómo calcular el área de un triángulo y de un rectángulo concretos, respectivamente.

Si bien la forma de medir los terrenos se ha perfeccionado, se conserva la palabra que significa “medir la tierra” y que ahora se utiliza para designar una parte de las Matemáticas que se ocupa de estudiar las figuras y cuerpos que se pueden trazar en el espacio. La palabra la utilizas desde hace tiempo, ¿adivinas cuál es? Pues sí, es Geometría.

Estos “tensadores” utilizaban cuerdas de doce nudos que al tensarlas marcaban líneas perpendiculares sobre el suelo, ya que formaban un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Sin embargo, se pueden construir otros triángulos rectángulos que proporcionen líneas perpendiculares, únicamente han de cumplir la misma relación que cumple el de la figura y es $3^2 + 4^2 = 5^2$. A las ternas de números a , b y c que cumplen que $a^2 + b^2 = c^2$ se les llama ternas Pitagóricas y si construimos un triángulo con los lados de longitud a , b y c , será un triángulo rectángulo.



3. LOS TENSADORES

- 3.1. ¿Eres capaz de encontrar otras ternas pitagóricas y ser un buen tensorador?

Además de los números 3, 4 y 5 existen infinidad de números enteros y positivos a , b , c que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. A continuación, vamos a esbozar el desarrollo de un algoritmo que nos da ternas pitagóricas sin necesidad de ir probando.

Para empezar, consideremos tres números pitagóricos que sean primos entre sí (los demás se hallan multiplicándolos por cualquier factor entero p). De la propia igualdad $a^2 + b^2 = c^2$, despejando y utilizando la fórmula de diferencia de cuadrados, obtenemos, $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$, donde los factores $c + b$ y $c - b$ son primos entre sí, como consecuencia de la hipótesis inicial. Pero si el producto de dos números primos entre sí es un cuadrado, entonces, cada uno de ellos será un cuadrado, es decir, $a^2 = (c + b)(c - b) = m^2 * n^2$, con lo cual:

$$a = mn \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

donde m y n son números impares primos entre sí. Por ejemplo, para $m = 7$ y $n = 3$ se obtiene $21^2 + 20^2 = 29^2$.

- 3.2. Da valores a m y n para formar otros números pitagóricos.

Es evidente que si a , b , c son un trío de números pitagóricos, los números pa , pb , pc (donde p es un factor entero) serán también números pitagóricos. Y al contrario, si los números de Pitágoras tienen un factor común, pueden ser simplificados por éste, obteniéndose de nuevo el grupo de números pitagóricos.



4. ¡QUÉ FRACCION!

¿Cómo utilizaban las fracciones? El uso de fracciones que hacían los egipcios es bastante curioso y elaborado. Éstas siempre tenían de numerador el 1 y de denominador cualquier número entero mayor de 1. No tenían notación para escribir fracciones que no fueran del tipo anterior, a excepción, de las fracciones $2/3$ y $3/4$. Como ves, cualquier otra fracción que podamos usar ahora no tenía sentido para ellos. Así, $2/5$ en su concepción aritmética era representada como $1/3 + 1/15$, tal como se recoge en el papiro de Rhind. Los sumandos siempre eran diferentes, nunca $1/5 + 1/5$. Puede parecer una representación poco útil y rebuscada, pero quizá se base en el concepto de fracción como la división de un todo en n partes. No se sabe exactamente el método que usaban para conseguir esta descomposición, pues no es única.

- 4.1. De hecho, ya hemos propuesto tres descomposiciones diferentes para la fracción $3/4$, en las actividades de segundo ciclo, a saber, $3/4 = 1/2 + 1/4 = 1/2 + 1/5 + 1/n = 1/2 + 1/6 + 1/n$. Obtén el valor de n e intenta encontrar otras representaciones diferentes de $3/4$ como suma de fracciones egipcias.



5. LAS FRACCIONES EGIPCIAS Y LA ELECTRÓNICA

En la actualidad, podemos encontrar aplicaciones a esta forma de expresar las fracciones. Por ejemplo, resultaría muy sencillo comparar fracciones y decidir cuál es mayor si aparecen expresadas como suma de *fracciones egipcias*. Vemos, claramente, que $4/5$ es mayor que $3/4$ si comparamos sus respectivas descomposiciones.

$$\begin{aligned}3/4 &= 1/2 + 1/4 \\4/5 &= 1/2 + 1/4 + 1/20\end{aligned}$$

La aplicación te puede parecer un poco artificial, ya que, actualmente el uso de calculadoras facilita este tipo de comparaciones. Lee atentamente el siguiente enunciado y descubrirás otra interesante aplicación.

5.1. Como ya sabrás por otras asignaturas, cuando tenemos un circuito eléctrico podemos agrupar las resistencias en serie o en paralelo. Nos interesan los circuitos en paralelo. La resistencia equivalente de un circuito en paralelo de n resistencias está dada por la expresión: $1/R_{\text{equivalente}} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n$. ¿Te recuerda algo? Efectivamente, tenemos de nuevo las *fracciones egipcias*. Las resistencias comerciales están formadas por la unión de 12 resistencias estándar y sus múltiplos de 10. Son las llamadas series E12, que tienen los siguientes valores (también existe la serie E24):

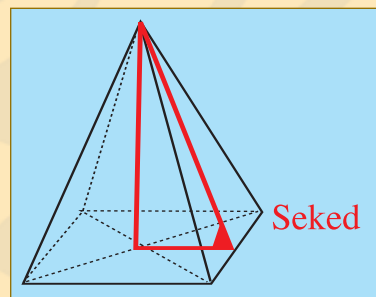
10	12	15	18	22	27	33	39	47	56	68	82
100	120	150	180	220	270	330	390	470	560	680	820
1000	1200	1500	1800	2200	2700	3300	3900	4700	5600	6800	8200

Supongamos que quieres construir tres circuitos, cada uno de ellos debe tener las siguientes resistencias: 6, 20 y 30. ¿Encuentra para cada uno de estos circuitos la combinación de resistencias de la serie E12 más barata? (NOTA: supondremos que la combinación más barata es aquella que utilice un menor número de resistencias).



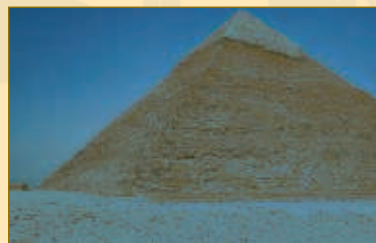
6. EL CONSTRUCTOR DE PIRÁMIDES

Aunque no se puede hablar de una trigonometría egipcia, parece obvio que unos ciertos conocimientos sí debían tener. Cómo, si no, levantar sus pirámides sin estos mínimos conocimientos. Los problemas 56 a 60 del papiro de Rhind tratan sobre pendientes, alturas y bases de pirámides. Un problema básico en la construcción de una pirámide es mantener la misma inclinación para las cuatro caras de la misma, ya que, en caso contrario, podrían no converger en un único vértice. Los egipcios expresaban esta pendiente mediante el cálculo de una razón llamada *seqt*, que se corresponde con la inversa de nuestra actual tangente, lo que llamamos cotangente. En la práctica se valdrían de triángulos maestros que aplicarían a las caras laterales para mantener su inclinación inicial.



El *seqt* es, por tanto, la forma en que los antiguos egipcios medían la pendiente de una superficie inclinada. Equivaldría, exactamente, a nuestra cotangente, si utilizaran la misma unidad en vertical y en horizontal, pero en mediciones verticales utilizaban como unidad de medida el *codo* (distancia desde el codo a la punta de los dedos que equivalía a 0,523 metros) y en horizontales el *palmo* (1 codo = 7 palmos). De esta manera, expresaban el *seqt* en palmos por codo.

- 6.1. Resuelve, para empezar, el problema 56 del papiro de Rhind: *Cuál es el seqt de una pirámide de 250 codos de altura y 360 codos de lado en la base.* Con este dato y la ayuda de tu calculadora obtén el ángulo de inclinación de la pirámide.
- 6.2. Expresa mediante un algoritmo la obtención del *seqt* para una pirámide cuyas medidas vengan expresadas en metros. Resume en una fórmula el algoritmo anterior. Recuerda que el *seqt* viene expresado en *palmas* por *codos*.
- 6.3. La gran pirámide de Keops tiene base cuadrada de lado 230 m. y cada una de las aristas mide 218,5 m. Calcula el *seqt* de esta pirámide, su ángulo de inclinación y su volumen. Para hacerte una idea de su tamaño calcula el número de bloques cúbicos de piedra de 2 m. de lado, necesarios para rellenarla totalmente.



7. CÓMO CALCULAR LA ALTURA DE LAS PIRÁMIDES

Sin embargo, el problema básico con el que se enfrentaban era el de calcular la altura de la pirámide que iban a construir. Disponían del lado de la base y del seqt que iban a emplear. Con estos datos podían calcular, previamente, la altura que alcanzaría dicha pirámide. A modo de ejemplo, te presentamos este proceso que aparece en el problema 59 del papiro de Rhind: *Si construyes una pirámide cuyo lado de la base es 12 (codos) y con un seqt de 5 palmos y 1 dedo, ¿cuál es la altura?*

- Multiplica por dos el seqt con el objeto de considerar la base entera, $2 \times 5 \frac{1}{4}$, puesto que un palmo equivale a cuatro dedos.
- Divide 6 entre $10 \frac{1}{2}$ para reducir a la relación entre las mismas unidades, $6 : 10 \frac{1}{2} = b$
- Esta cantidad se multiplica por el lado de la base, $b \times 12 = 8$ codos.

7.1. Aunque el resultado final es correcto, hemos introducido un error en el proceso, ¿eres capaz de descubrirlo? Revisa el planteamiento y los conceptos empleados en la resolución.



8. LAS INUNDACIONES

Cada año, en el mes de Junio, como consecuencia del deshielo de las cumbres de los “Montes de la Luna” (origen del río Nilo), comenzaban las inundaciones. Éstas hacían que en algunos lugares, como en las gargantas de las primeras cataratas, se pudieran observar aumentos de caudal de entre 6 y 8 metros. Los egipcios aprendieron a predecir la cantidad de cosecha según la altura que alcanzaba el agua en dichas gargantas. Si era menor de 6 metros no se anegarían suficientes terrenos para obtener alimentos para toda la población. Si la crecida era superior a 8 metros el agua llegaba hasta los poblados y los destruía.



8.1. Imaginemos que con una crecida que alcanzase los 6 m. sobre el nivel normal del Nilo se obtuviese una cosecha que alimentara a 200.000 personas; y que si se alcanzasen los 8 m. se obtuviesen alimentos suficientes para 600.000 personas. Utiliza la interpolación lineal para predecir la cantidad de personas que podrían comer si la crecida fuese de 7,5 m.

8.2. Utiliza la interpolación lineal para predecir cuantos egipcios podrían alimentarse si el Nilo subiese 9 m. sobre su nivel normal en la primera catarata.

¿Es fiable esta predicción? ¿Por qué?



9. EL GRAN MATEMÁTICO EGIPCIO

El matemático más conocido nacido en una ciudad egipcia es **Claudio Ptolomeo**. Nació en una ciudad del Alto Egipto (Ptolemais Hermiu) hacia el año 100 de nuestra era y falleció en Alejandría 70 años después. En esa época, Egipto ya había sido ocupado, años atrás, por los romanos, tras el suicidio de Cleopatra. Ptolomeo fue un destacado astrónomo y geógrafo. Su doctrina, que abarca muchos campos del saber, fue expuesta en trece libros que llamó *Gran composición matemática*, pero que recibió de los traductores árabes el título consagrado de *Almagesto*. Ningún escrito de la Antigüedad tuvo un éxito comparable a la obra de Ptolomeo, cuyos principios permanecieron indiscutidos hasta el Renacimiento.



- 9.1. Utiliza Internet o busca en una enciclopedia más datos acerca de este sabio y de su *Almagesto*. Averigua cuál fue su relación con la Trigonometría.



10. ¡MENUDO REPARTO!

Por otra parte, el problema de progresiones más antiguo no es el de la recompensa al inventor del ajedrez, que tiene ya más de dos mil años, sino otro mucho más viejo, repartición del pan, registrado en el papiro de Rhind: *Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?*

- 10.1.** Es evidente que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética. Resuelve el reparto mediante un sistema de ecuaciones.

Aparecen otros problemas relacionados con progresiones. Entre ellos, el problema 79, el único sobre progresiones geométricas en el Antiguo Egipto que nos es conocido, además del primer ejemplo de matemática recreativa del que se tiene noticia. Se trata de una progresión geométrica en la que el primer término es 7 y la razón también 7. En el problema se dice, en traducción libre: *Había una propiedad compuesta por siete casas; cada casa tenía siete gatos; cada gato se comía siete ratones; cada ratón se comía siete granos de cebada; cada grano había producido siete medidas. ¿Cuánto sumaba todo esto?* El escriba obtiene la suma de todos los términos de la progresión, aunque éste no parece un objetivo lógico.

- 10.2.** Utiliza la fórmula apropiada para obtener tú también esta cantidad.



Bachillerato. Matemáticas, **Egipto**

