

SESIÓN 13: CÁLCULO DE INTEGRALES REALES MEDIANTE RESIDUOS

Los residuos no son sólo útiles para calcular cierto tipo de integrales en el plano complejo sino que, como veremos en esta sesión, pueden ser también utilizadas para calcular integrales reales. Nosotros sólo estudiaremos tres tipos de integrales reales a las que se les puede aplicar esta técnica, pero la lista es mucho mayor.

1. Cálculo de integrales reales

Una de las principales aplicaciones del Teorema del Residuo es el cálculo de integrales *reales* (eventualmente impropias). Para ello hay que elegir convenientemente tanto la función $f(z)$ como el contorno de integración γ . Nosotros sólo consideraremos tres tipos de integrales:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función *racional* real sin singularidades (es decir, $p(x), q(x)$ son polinomios, con el grado de q estrictamente mayor que el grado de p , y $q(x) \neq 0$ para $\forall x \in \mathbb{R}$). Si z_1, z_2, \dots, z_n son los ceros del polinomio complejo $q(z)$, entonces la función $f(z) = p(z)/q(z)$ es analítica en \mathbb{C} , excepto en los puntos aislados $z_k \notin \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$. Consideremos $\oint_{\gamma} f(z)dz$ a lo largo del contorno cerrado simple γ que consiste en el segmento $[-R, R]$ sobre el eje real y en la semicircunferencia C_R de radio R centrada en el origen y contenida en el *semiplano superior* $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. Suponiendo que C_R no interseca ninguno de los polos de $f(z)$,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \gamma_{int}} \text{Res}(f, z_k)$$

Pasando al límite $R \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res}(f, z_k) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz$$

donde

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

es el *valor principal de Cauchy* de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

2. $\int_0^{2\pi} g(\sin \theta, \cos \theta)d\theta$, donde $g(\sin \theta, \cos \theta)$ es una función racional de $\sin \theta$ y $\cos \theta$. El cambio de variable $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, es decir,

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

transforma la integral anterior en la integral de contorno $\oint_{\gamma} f(z)dz$, donde $f(z) = g[(z-z^{-1})/2i, (z+z^{-1})/2]/iz$ y γ es la circunferencia unidad centrada en el origen. Si ninguno de los posibles polos z_k ($1 \leq k \leq n$) de f está sobre γ , entonces

$$\int_0^{2\pi} g(\sin \theta, \cos \theta)d\theta = 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \text{Res}(f, z_k)$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx$, donde $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional real sin singularidades reales y $\alpha > 0$. Se considera entonces la integral de contorno $\oint_{\gamma} f(z)e^{i\alpha z} dz$, donde γ es el mismo contorno que en las integrales del tipo 1. Entonces, separando sus partes real e imaginaria,

$$\begin{aligned} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \text{Re} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz \right] \\ \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= \text{Im} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz \right] \end{aligned}$$

En el caso $\alpha < 0$, el contorno de integración γ consiste en el segmento $[-R, +R] \subset \mathbb{R}$ y en la semicircunferencia C_R de radio R centrada en el origen pero contenida ahora en el *semiplano inferior* $\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$. Obsérvese que la orientación positiva de γ (sentido antihorario) induce esta vez el sentido negativo (de mayor a menor) en $[-R, +R]$, de manera que, en las dos igualdades anteriores, aparte de cambiar Π^+ por Π^- , hay también que sustituir $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx$ por $-\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx$. Otra posibilidad es reducir este caso al anterior mediante las identidades

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos |\alpha| x dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin |\alpha| x dx \end{aligned}$$

Nota 1 Si la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe, entonces

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

trivialmente. Pero, en general, puede ocurrir que exista el valor principal de Cauchy de una integral impropia sin que exista dicha integral impropia (por ejemplo, cuando $f(x) = \sin x$).

A la vista de las fórmulas para calcular integrales reales de los tipos 1 y 3 mediante residuos, se ve que los cálculos se simplifican considerablemente cuando

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz = 0$$

respectivamente. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para ello.

Teorema 1 Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{C} que contiene al semiplano superior $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$ y sea f una función analítica en Ω excepto, a lo sumo, en un número finito de singularidades ninguna de las cuales está sobre el eje real.

1. Si $|f(z)| \leq M/|z|^k$ para $|z| \geq R_0$, donde $k > 1$ y M son constantes, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res}(f(z), z_k)$$

2. Si $|f(z)| \leq M/|z|^k$ para $|z| \geq R_0$, donde $k > 0$ y M son constantes, y $\alpha > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \text{Re} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= \text{Im} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k) \right] \end{aligned}$$

Prueba. 1. Sea $C_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ el contorno semicircular de centro en el origen y radio R contenido en Π^+ . Hay que probar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

Por la acotación ML de la integrales de contorno,

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{M\pi}{R^{k-1}}$$

para $R \geq R_0$. Entonces,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M\pi}{R^{k-1}} = 0$$

ya que, por hipótesis, $k > 1$. Además, como $f(x)$ es integrable en cualquier intervalo de \mathbb{R} (por ser continua) y

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx \leq M \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^k} < \infty, \quad \int_{-\infty}^a |f(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^a \frac{dx}{x^k} < \infty \quad (|a| \geq R_0, k > 1)$$

se deduce por el del criterio de comparación para integrales impropias que $f(x)$ es integrable en \mathbb{R} y, por tanto,

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

2. En este caso hay que probar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (\alpha > 0)$$

Parametrizando la integral de contorno con θ , el argumento de $z \in C_R$,

$$\int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{i\alpha Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta$$

de donde

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| f(Re^{i\theta}) e^{i\alpha Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \int_0^\pi \left| f(Re^{i\theta}) e^{i\alpha R \cos \theta - \alpha R \sin \theta} iRe^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \int_0^\pi \left| f(Re^{i\theta}) \right| e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta \\ &\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

para $R \geq R_0$. Ahora bien: $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (es decir, la gráfica de la función $\sin \theta$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ queda por encima de la recta que une el origen de coordenadas con el punto $(\pi/2, 1)$). Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta &= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R \theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{2M}{R^{k-1}} \frac{\pi}{2\alpha R} \left[e^{-2\alpha R \theta/\pi} \right]_{\pi/2}^0 = \frac{\pi M}{\alpha R^k} (1 - e^{-\alpha R}) \end{aligned}$$

y esta expresión tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ ya que, por hipótesis, $\alpha > 0$. Por último y de forma análoga al caso anterior, se deduce que

$$\begin{aligned} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \\ \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \end{aligned}$$

■

Corolario 1 Sean $p(z)$ y $q(z)$ dos polinomios de grados m y n , respectivamente. Supongamos además que los ceros de $q(z)$, a saber, z_1, z_2, \dots, z_n , no son reales. Se cumple:

1. Si $n \geq m + 2$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_k \right)$$

2. Si $n \geq m + 1$ y $\alpha > 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right) \right]$$

3. Si $n \geq m + 1$ y $\alpha < 0$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos \alpha x dx = -\operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^-} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin \alpha x dx = -\operatorname{Im} \left[2\pi i \sum_{z_k \in \Pi^-} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right) \right]$$

Prueba. Sean

$$p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_m, \dots, a_0 \in \mathbb{R}, a_m \neq 0)$$

$$q(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0 \quad (b_n, \dots, b_0 \in \mathbb{R}, b_n \neq 0)$$

donde $n - m =: h \geq 2$ o 1, según el caso. La función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ es analítica en todo el plano complejo excepto, a lo sumo, en los ceros del polinomio $q(z)$, ninguno de los cuales es, por hipótesis, real. Para poder aplicar a $f(z)$ el Teorema 1 sólo falta, pues, probar que $|p(z)/q(z)| \leq M/|z|^h$ para $|z|$ suficientemente grande.

En primer lugar demostraremos que existen $M_0 > 0$ y $R_0 \geq 1$ tales que

$$|q(z)| \geq M_0 |z^n|$$

si $|z| \geq R_0$. En efecto: de $b_n z^n = q(z) - b_{n-1} z^{n-1} - \dots - b_0$ y de la desigualdad triangular, obtenemos

$$|b_n z^n| \leq |q(z)| + |b_{n-1} z^{n-1}| + \dots + |b_0|$$

y, por tanto,

$$|q(z)| \geq |b_n| |z^n| - |b_{n-1}| |z^{n-1}| - \dots - |b_0|$$

Sea $b = |b_{n-1}| + \dots + |b_0|$. Si $|z| \geq 1$, entonces

$$|q(z)| \geq |z|^{n-1} \left(|b_n| |z| - |b_{n-1}| - \dots - \frac{|b_0|}{|z|^{n-1}} \right) \geq |z|^{n-1} (|b_n| |z| - b)$$

Sea $M_0 > |b_n|$ y $R_0 := \max\{1, b/(|b_n| - M_0)\}$. Entonces, $|z| > R_0$ implica $|b_n| |z| - b > |z| M_0$, de donde $|q(z)| \geq M_0 |z^n|$.

Análogamente, existe un $M_1 > 0$ tal que

$$|p(z)| \leq M_1 |z^m|$$

si $|z| \geq 1$. Basta coger, en efecto, $M_1 = |a_m| + \dots + |a_0|$.

Por tanto, si $|z| > R_0 \geq 1$, tenemos

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leq \frac{M_1}{M_0} \frac{1}{|z|^h} \leq \frac{M}{|z|^h}$$

con $M := M_1/M_0 > 0$, como queríamos demostrar. ■

Nota 2 La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o \mathbb{R} es una nueva función \hat{f} definida por la integral impropia paramétrica

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Vemos, pues, que si $f = p/q$ es una función real racional con el grado del polinomio q mayor que el del polinomio p , entonces (i) si $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(-\omega)x dx + \frac{i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(-\omega)x dx \\ &= -\operatorname{Re} \left[\sqrt{2}\pi i \sum_{z_k \in \Pi^-} \operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, z_k) \right] - i \operatorname{Im} \left[\sqrt{2}\pi i \sum_{z_k \in \Pi^-} \operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, z_k) \right] \\ &= -\sqrt{2}\pi i \sum_{z_k \in \Pi^-} \operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, z_k) \end{aligned}$$

y, análogamente, (ii) si $\omega < 0$,

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2}\pi i \sum_{z_k \in \Pi^+} \operatorname{Res}(f(z)e^{-i\omega z}, z_k)$$

Estas fórmulas son también ciertas bajo condiciones más generales.

Ejemplo 1 Calcular mediante el teorema de residuos las integrales reales impropias

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}; \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}; \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^4+c^4} dx$$

donde $n \in \mathbb{N}$, a es una constante real positiva y distinta de 1, y $b, c > 0$.

Solución. (a) Para $n = 1$ la integral es trivial y se deja como ejercicio. Sea, pues, $n \geq 2$. La función compleja

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$$

con denominador de grado $2n$ y numerador de grado 0, tiene dos polos de orden n en $z = \pm i \notin \mathbb{R}$, de los cuales sólo $z = +i$ está en el semiplano superior. El residuo en este punto vale

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-i)^n \frac{1}{(z+i)^n (z-i)^n} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z+i)^{-n} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(n-1)!} (-n)(-n-1)\dots(-n-n+2)(z+i)^{-n-n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)\dots(2n-2)}{(n-1)!} \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -\frac{i}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \pi i \text{Res}(f, i) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}$$

(b) Haciendo los cambios

$$z = e^{i\theta}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

tenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \int_\gamma \frac{idz}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}$$

donde γ es el círculo unidad centrado en el origen y orientado positivamente. Vemos que el nuevo integrando en la variable compleja z tiene polos simples en $z = a$ y $z = 1/a$, ninguno de los cuales está sobre γ ya que, por hipótesis, $a \neq 1$. Los residuos correspondientes son

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{i}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}, a\right) &= \frac{i}{az-1} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2-1} \\ \text{Res}\left(\frac{i}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}, \frac{1}{a}\right) &= \frac{i}{a(z-a)} \Big|_{z=1/a} = \frac{i}{1-a^2} \end{aligned}$$

Si $|a| < 1$, entonces $a \in \gamma_{int}$ y $1/a \notin \gamma_{int}$, de manera que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{i}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}, a\right) = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

Si, por el contrario, $|a| > 1$, entonces $a \notin \gamma_{int}$, $1/a \in \gamma_{int}$ y

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{i}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}, \frac{1}{a}\right) = \frac{2\pi}{a^2-1}$$

En resumen,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{|a^2-1|} \quad (a \neq 1)$$

(c) La función

$$F(z) = \frac{ze^{ibz}}{z^4 + c^4}$$

tiene polos simples en los puntos

$$z^4 + c^4 = 0 \Leftrightarrow z_k = c\sqrt[4]{-1} = ce^{i\pi(1+2k)/4} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

de los cuales sólo

$$z_0 = \frac{c}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \text{y} \quad z_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}(-1+i) = -\bar{z}_0$$

pertenecen al semiplano superior. Por tanto, por el Lema 3 de la Sesión 12,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}(F(z), z_k) &= \frac{z_0 e^{ibz_0}}{4z_0^3} + \frac{z_1 e^{ibz_1}}{4z_1^3} = -\frac{1}{4c^4} (z_0^2 e^{ibz_0} + \bar{z}_0^2 e^{-ib\bar{z}_0}) \\ &= -\frac{1}{2c^4} \operatorname{Re} \left(ic^2 e^{-bc(1-i)/\sqrt{2}} \right) = \frac{e^{-bc/\sqrt{2}}}{2c^2} \sin \frac{bc}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin bx}{x^4 + c^4} dx &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}(F(z), z_k) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{e^{-bc/\sqrt{2}}}{2c^2} \sin \frac{bc}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi e^{-bc/\sqrt{2}}}{c^2} \sin \frac{bc}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

2. Problemas propuestos

1. Calcular mediante residuos las integrales reales

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} \quad (a > |b|)$

d) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$

e) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{2+\cos t} dt$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx$

$$g) \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + b^4} dx \quad (a, b > 0)$$

$$h) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3 \sin \theta)^2}$$

$$i) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} \quad (0 < b < a)$$

$$j) \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dx$$

$$k) \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx \quad (a, b > 0)$$

$$l) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$$

$$m) \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + a^4} dx \quad (a > 0)$$

2. Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + a^4} \quad (a > 0).$$

3. Lecturas adicionales

1. J.M. Amigó: *Fundamentos de Matemáticas*. Servicios de Reprografía de la Universidad Miguel Hernández, Elche, 2001.
2. J.E. Marsden, M.J. Hoffman: *Basic Complex Analysis*. W.H. Freeman, New York, 1999.
3. M.R. Spiegel: *Variable Compleja*. McGraw-Hill, Méjico, 2000.
4. A.D. Wunsh: *Variable Compleja con Aplicaciones*. Addison-Wesley, Méjico, 1999.